

Université de Montréal

**Négativité d'intrication dans les systèmes de fermions
libres inhomogènes**

par

Gabrielle Blanchet

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

5 Septembre 2024

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

Négitivité d'intrication dans les systèmes de fermions libres inhomogènes

présenté par

Gabrielle Blanchet

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Manu Paranjape

(président-rapporteur)

Luc Vinet

(directeur de recherche)

William Witczak-Krempa

(membre du jury)

Résumé

Nous investiguons l'intrication entre deux régions non-complémentaires dans la chaîne de Krawtchouk, et ce, par le biais de la négativité logarithmique fermionique. Le premier cas étudié concerne deux intervalles adjacents. Nous retrouvons les résultats prédits par une théorie conforme des champs ayant une charge centrale de $c = 1$. Nous étudions par la suite le cas d'intervalles disjoints. Nous nous concentrons sur le cas squelettique où chaque région ne contient qu'un seul site et sont séparées par une distance d . Nous commençons par offrir une formule générale du comportement du terme dominant de la négativité logarithmique fermionique pour une grande séparation et pour toute fraction de remplissage (*filling fraction*) ρ , qui dépend de la fonction de corrélation à deux points. Nous trouvons par la suite le comportement de la négativité logarithmique pour des intervalles centrés respectivement autour de pN et $N/2$ pour tout paramètre p et $\rho \ll 1$, ainsi que pour $p = 1/2$ et pour tout ρ . Nous offrons par la suite une conjecture alliant les deux cas. Le comportement de la négativité logarithmique obtenu concorde avec celui obtenu pour le cas homogène avec des fermions de Dirac où la dimension d'échelle fermionique Δ_f est de $1/2$. Par la suite, nous investiguons le cas où un le premier site se trouve à une distance m du début de la chaîne, et le second à $d + m$. Les dimensions d'échelles obtenues dépendent de la parité de m : pour un m pair, $\Delta_f^{pair} = 3/8$, et pour un m impair, $\Delta_f^{impair} = 5/8$. Les résultats sont supportés par des calculs analytiques et numériques.

Mots clés : Intrication, systèmes de fermions libres inhomogènes, polynômes orthogonaux, négativité logarithmique

Abstract

We investigate the entanglement between two non-complementary regions in the Krawtchouk chain, using the fermionic logarithmic negativity. The first case studied concerns two adjacent intervals, where we find the results predicted by conformal field theory for a central charge of $c = 1$. We then study the case of disjoint intervals. We focus on the skeletal regime where each region contains a single site and is separated by a distance d . We begin by offering a general expression of the leading term for fermionic logarithmic negativity at large separation and for any filling fraction ρ . This enables us to express the logarithmic negativity in terms of the two points correlation function. We subsequently find the behavior of logarithmic negativity for intervals centered respectively around pN and $N/2$ for any parameter p and $\rho \ll 1$, as well as for $p = 1/2$ and for any ρ . We subsequently offer a conjecture combining the two cases. The logarithmic negativity behavior obtained agrees with the one established for the homogeneous case with Dirac fermions where the fermionic scaling dimension Δ_f is $1/2$. Next, we investigate the case where the first site is at a distance m from the start of the chain, and the second at $d + m$. The scaling dimensions obtained depends on the parity of m : for an even m , $\Delta_f^{even} = 3/8$, and for an odd m , $\Delta_f^{odd} = 5/8$. The results are supported by analytical and numerical calculations.

Keywords : Entanglement, inhomogeneous free-fermion systems, orthogonal polynomials, logarithmic negativity

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Liste des figures	11
Liste des sigles et des abréviations	13
Remerciements	15
Introduction	17
0.1. Plan du mémoire	18
0.2. Contribution de l'auteure	18
Chapitre 1. Intrication	19
1.1. Séparabilité	19
1.1.1. États purs	19
1.1.2. États mixtes	20
1.2. Mesures d'intrication	21
1.2.1. Entropie de von Neumann	21
1.2.2. Entropie de Rényi	22
1.2.3. Négativité et négativité logarithmique	23
Chapitre 2. Chaînes de spin	25
2.1. Modèle XX	25
2.1.1. Diagonaliser l'Hamiltonien	26
2.1.2. Chaîne homogène	27
2.1.3. Chaîne inhomogène	28
2.1.3.1. Chaîne de Krawtchouk	29
Chapitre 3. Négativité logarithmique pour fermions libres	33

3.1.	Matrice de corrélation et fermions libres.....	33
3.2.	Négativité fermionique.....	34
3.3.	Négativité fermionique et théorie conforme des champs.....	38
Chapitre 4.	Fermionic logarithmic negativity in the Krawtchouk chain....	39
4.1.	Introduction.....	39
4.2.	The Krawtchouk chain.....	41
4.2.1.	Definition and diagonalization.....	41
4.2.2.	Ground-state correlation functions.....	42
4.3.	Fermionic negativity in free-fermion models.....	43
4.4.	Adjacent regions.....	45
4.5.	Disjoint regions.....	46
4.5.1.	Bulk negativity.....	46
4.5.2.	Boundary negativity.....	48
4.6.	Conclusion.....	50
	Acknowledgements.....	52
4.7.	Appendix : Asymptotics for the correlation functions.....	52
4.7.1.	Bulk correlation functions.....	53
4.7.1.1.	Bulk correlation function for small filling fraction $\rho \ll 1$	53
4.7.1.2.	Bulk correlation function for $p = \frac{1}{2}$	54
4.7.2.	Boundary correlation functions.....	58
Chapitre 5.	Conclusion.....	61
Références	63

Liste des figures

3.1	Géométrie tripartite de la chaîne ouverte de Krawtchouk.	33
4.1	Geometry of a tripartite open chain.	43
4.2	Fermionic logarithmic negativity \mathcal{E}_f in log-scale for adjacent regions centered in the middle of the chain, of length $\ell_1 = \ell_2 = \frac{N+1}{4}$ (left) and $\ell_1 = 2\ell_2 = \frac{N+1}{4}$ (right). \mathcal{E}_f is plotted as a function of N for the homogeneous chain and the Krawtchouk chain for various values of p . The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.3.10), and the solid line is the curve $\frac{1}{4} \log N$, which serves as a guide to the eye. Clearly all curves are parallel, indicating the same leading term $\mathcal{E}_f \sim \frac{1}{4} \log N$.	45
4.3	Illustration of the geometry for the bulk negativity. The two sites m and n are separated by a distance d and centered around the position pN	46
4.4	Two-point correlation function (left) and fermionic logarithmic negativity (right) between two sites centered around pN as a function of the distance d with $N = 2 \times 10^4$ and small filling fraction $\rho = 2 \times 10^{-3}$ for various values of p . <i>Left:</i> The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.2.10). The solid lines represent the analytical prediction of Eq. (4.5.3) for small filling fraction ρ . <i>Right:</i> The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.3.10). The solid lines correspond to Eq. (4.5.2) where the two-point correlation function is given by Eq. (4.5.3). The matches are extremely convincing.	47
4.5	Two-point correlation function (top) and fermionic logarithmic negativity (bottom) between two sites centered around pN as a function of the distance d with $N = 4000$ for various values of ρ and p . <i>Top:</i> The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.2.10). The solid lines represent the conjecture of Eq. (4.5.5) (or equivalently Eq. (4.5.4) for $\rho = 1/2$). <i>Bottom:</i> The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.3.10). The solid lines correspond to Eq. (4.5.2) where the two-point correlation function is given by Eq. (4.5.5).....	49

4.6	Illustration of the geometry for the boundary negativity. The two sites m and n are separated by a distance d , and $m = 0$ is at the left end of the chain. We also consider the case $m = 1$, but the figure is very similar.	49
4.7	Boundary correlation $C_{m,m+d}$ with $m = 0,1$ for $N = 10^6$ and $\rho = p = 0.15$. The symbols are obtained by numerical evaluation of the correlation functions, and the solid lines are the analytical predictions of Eq. (4.5.8). We find an excellent agreement.....	50
4.8	Boundary logarithmic negativity between sites m and $m + d$ as a function of d in log-log scale, for $m = 0,1,2,3$ with $N = 1000$ and $\rho = p = 1/2$. The symbols are numerical calculations of the negativity, and the solid lines are either obtained from Eq. (4.5.8) for $m = 0,1$ or numerical fit for $m = 2,3$. The slope of the curves depends on the parity of m , and we have $\mathcal{E}_f \propto d^{-4\Delta_f}$ with $\Delta_f^{\text{even}} = 3/8$ and $\Delta_f^{\text{odd}} = 5/8$	51

Liste des sigles et des abréviations

PPT	Transposée partielle positive, de l'anglais <i>Positive partial trans- pose</i>
CFT	Théorie conforme des champs, de l'anglais <i>Conformal field theory</i>
RVB	de l'anglais <i>Resonating valence bond</i>

Remerciements

J'aimerais premièrement remercier Luc Vinet, mon directeur de recherche pour l'accueil au sein du groupe, l'inestimable expertise partagée lors de discussions sur ce projet ainsi que pour les judicieux conseils académiques.

J'aimerais également sincèrement remercier Gilles Parez, pour toutes les explications sur les chaînes de spin et l'intrication, et ce, depuis l'été 2022. Merci pour toutes les erreurs de transcription, de frappe et de signes attrapées au cours des innombrables relectures de calculs et de textes effectuées au cours de la dernière année. Merci pour la patience et l'opportunité d'apprentissage.

Je tiens également à remercier tous les membres du groupe de recherche pour les agréables discussions autour de tasses de thé partagées lors des dîners à André-Aisenstadt. Merci Gilles, Ismaël, Josée, Meri, Pierre-Antoine et Xiaohong. J'aimerais également prendre le temps de remercier particulièrement Ismaël pour toutes les discussions et les innombrables heures passées à la bibliothèque au long des deux cours de théorie quantique des champs. Sans ces échanges, ces cours m'auraient certainement découragée.

Ces remerciements seraient sans aucun doute incomplets si mes parents, Normand et Pascale n'y figuraient pas. Merci d'avoir su nourrir la curiosité qui m'habite depuis tant d'années, d'avoir toujours veillé à mon épanouissement.

Et pour terminer, merci à Arthur, Jérémy et Marine pour le support incontesté dans les moments de doute, pour les combos rando-théâtre-aurores-boréales, pour les discussions vulnérables : la richesse que vous avez apporté à ma vie au cours de la dernière année m'est inestimable.

Introduction

Phénomène purement quantique, l'intrication intrigue depuis les balbutiements de la mécanique quantique. En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen partageaient leur célèbre expérience de pensée [1], rétrospectivement nommé paradoxe EPR, dont l'élément clé était l'intrication. Ce phénomène hautement non-local peut-être introduit à partir d'un exemple élémentaire, soit, un état de Bell. Prenons l'état à deux particules de spins *up* et *down*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle). \quad (0.0.1)$$

Si on mesure la première particule et que l'on obtient l'état $|\uparrow\rangle$, nous savons que sa voisine est également dans l'état $|\uparrow\rangle$, et ce sans même nécessiter de la mesurer. On dit de cet état qu'il est intriqué, il semble donc que l'on peut obtenir de l'information sur une autre particule, et ce, instantanément, peu importe la distance. Cet énoncé semble donc briser les lois de la relativité restreinte et est au coeur du paradoxe EPR. Pour des systèmes à plusieurs particules, la caractérisation de l'intrication multipartite est plus délicate, mais d'autant plus riche. Il a également été montré que l'intrication pouvait être utilisée pour investiguer les transitions de phase quantique et offrir de précieux renseignements sur des états exotiques de la matière [2–4]. Plus récemment, avec l'essor de l'informatique quantique, l'intrication s'est révélée être une ressource clé pour effectuer divers protocoles et calculs quantiques [5], incluant le célèbre protocole de téléportation quantique [6]. Il va sans dire que l'étude de ce phénomène est d'un grand intérêt pour un éventail de domaines. Ce mémoire vise à étudier l'intrication entre deux régions non-complémentaires dans le modèle XX inhomogène dont les fonctions propres sont données par les polynômes de Krawtchouk, et ce, par le biais d'une mesure d'intrication nommée la négativité logarithmique fermionique.

Le modèle XX a précédemment été l'objet de diverses études en raison de la facilité avec laquelle il peut être analysé, puisqu'il est un système de fermions libres et est donc intégrable. L'état fondamental de ce modèle possède également une transition de phase quantique, qui a précédemment été étudiée à l'aide de l'entropie de Von Neumann [7]. Pour certaines valeurs du paramètre du champ magnétique externe de ce modèle, ce dernier est critique. Les valeurs

d'attentes de ses observables peuvent donc être décrite à l'aide d'une loi de puissance [8]. Les exposants des lois de puissance des observables peuvent servir à trier les modèles selon leur classe d'universalité qui regroupe les systèmes ayant les mêmes comportements critiques.

Le modèle investigué dans cet ouvrage, aussi nommé chaîne de Krawtchouk, une variante du modèle XX, a précédemment été l'objet d'études en raison de la propriété de transfert parfait d'états qu'il exhibe [9,10]. Il a également été l'objet d'études sous l'angle de l'entropie de von Neumann [11], une mesure d'intrication bipartite. Cependant le cas d'une géométrie tripartite n'a pas encore été étudié, c'est l'angle mort que le présent travail vise à combler.

0.1. Plan du mémoire

Ce mémoire est divisé comme suit. Un premier chapitre est consacré à la présentation de l'intrication et de certaines mesures de ce phénomène. Le second chapitre vise à détailler mathématiquement la chaîne de spin XX homogène et inhomogène en y présentant également le cas spécifique de la chaîne de Krawtchouk. Puis, les particularités entourant la négativité logarithmique, spécialement la différence entre ses définitions bosoniques et fermioniques, sont décrites au chapitre 3. Le chapitre 4 consiste en l'article qui fait état des résultats obtenus au cours de ce projet de recherche. Le chapitre 5 énonce la conclusion qui termine ce mémoire.

0.2. Contribution de l'auteure

Au chapitre 4 nous présentons l'article "*Entanglement negativity in the Krawtchouk chain*" par Gabrielle Blanchet, Gilles Perez et Luc Vinet.

L'auteure a implémenté des calculs numériques de négativité logarithmique dans la chaîne de Krawtchouk. Les résultats numériques de la section 4 sont l'oeuvre de l'auteure. L'auteure a effectué les premières démarches menant à la généralisation qu'est l'équation (4.5.2), les calculs ont été supplémentés par Gilles Perez. L'auteure a écrit la section 4 de l'article, qui a été substantiellement supplémentée et modifiée par Gilles Perez. L'auteure a produit les résultats menant à la section 7.1.2 de l'annexe et a écrit cette dernière.

Les auteurs ont mutuellement vérifié tous les calculs analytiques et les résultats numériques.

Chapitre 1

Intrication

1.1. Séparabilité

Pour définir ce qu'est l'intrication, la notion de séparabilité est primordiale puisque l'on dit qu'un état est intriqué seulement s'il n'est pas séparable. Il incombe donc de définir plus rigoureusement ce concept, à la fois pour des états purs et mixtes.

1.1.1. États purs

Considérons un système quantique à plusieurs corps dont l'état $|\psi\rangle$ appartient à l'espace de Hilbert \mathcal{H} de l'ensemble du système. Cet état, dit pur, peut être décomposé dans la base orthonormale $\{\phi_i\}$ de l'espace de Hilbert de la manière suivante

$$|\psi\rangle = \sum_i p_i |\phi_i\rangle, \quad (1.1.1)$$

où les coefficients p_i obéissent à $\sum_i |p_i|^2 = 1$. Prenons par la suite l'exemple d'un système bipartite dont l'espace de Hilbert est à $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. L'état étudié peut être représenté comme

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} p_{ij} |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle, \quad (1.1.2)$$

où $\{|\phi_i^k\rangle\}$ est une base orthonormale de \mathcal{H}_k . La décomposition de Schmidt, un cas particulier de la décomposition en valeurs singulières, permet de réécrire cet état sous la forme

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle, \quad \alpha_i \geq 0, \quad (1.1.3)$$

où $\{|u_i\rangle\}$ et $\{|v_i\rangle\}$ sont des bases orthonormales des espaces \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B respectivement [12]. Les coefficients α_i obéissent à la relation $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$. Dans le cas d'un système bipartite, un

état est considéré comme séparable si un seul des coefficients α_i est non-nul et est de norme 1. Le nombre de coefficients de Schmidt α_i non-nuls est appelé le nombre de Schmidt, ou même le rang de Schmidt. Si ce nombre est égal à 1, l'état est séparable et s'il est plus grand que 1, il est intriqué [13]. Plus simplement, un état pur est séparable s'il est de forme $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$.

De manière plus générale, pour un état pur $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$, ce dernier est séparable si $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_N\rangle$.

1.1.2. États mixtes

Les états mixtes diffèrent des états purs de par leur caractère plus classique : ce sont des ensembles stochastiques d'états purs. Contrairement aux états purs dont l'état entier est bien défini dans un espace de Hilbert, les états mixtes sont intrinsèquement des ensembles de matrices densités d'états purs. Cela reflète une certaine ignorance de l'état complet. Les décrire à partir d'un seul vecteur d'états comme les états purs est alors impossible. Il est donc utile d'introduire la matrice densité du système

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad (1.1.4)$$

où les états $\{|\phi_i\rangle\}$ forment une base orthonormale de l'espace de Hilbert du système et les coefficients p_i obéissent à la relation $\sum_i p_i = 1$. Dans le cas d'un état pur, il n'y a qu'un seul p_i non-nul ayant une valeur de 1, donnant comme matrice densité $\rho = |\phi\rangle \langle \phi|$. Les matrices densité doivent être Hermitiennes, semi-définies positives et doivent obéir à $\text{Tr}\rho = 1$ [13].

Considérons encore une fois un système bipartite décrit par un état mixte dont la matrice densité agit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Cet état est dit séparable s'il peut être représenté comme

$$\rho = \sum_i k_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad k_i \geq 0, \quad (1.1.5)$$

où $\{\rho_i^A\}$ et $\{\rho_i^B\}$ sont les matrices densité des états associés aux sous-systèmes A et B respectivement [14]. Les k_i satisfont également $\sum_i k_i = 1$.

Une fois de plus, dans le cas plus général où l'espace de Hilbert est défini tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$, un état est dit séparable si

$$\rho = \sum_i k_i \rho_i^1 \otimes \cdots \otimes \rho_i^N, \quad k_i \geq 0. \quad (1.1.6)$$

1.2. Mesures d'intrication

Quantifier l'intrication dans des systèmes à plusieurs corps n'est pas une mince tâche, il existe plusieurs manières de le faire. Diverses mesures d'intrication ont été proposées au fil des années, cependant il importe de se questionner sur les éléments qui font qu'une mesure d'intrication est appropriée. De prime abord, l'intrication a quelques propriétés clés qui nous permettent de jeter les bases quant à ce qu'est une bonne mesure d'intrication. Imaginons que nous avons un état à plusieurs particules séparé dans plusieurs laboratoires. L'ensemble des opérations physiquement réalisables sur ces états sont soit des opérations locales (LO, de l'anglais *local operations*), comme des mesures ou des opérations unitaires sur les états, ou de la communication classique sur les informations obtenues sur les états entre les laboratoires (CC). L'ensemble de ces opérations est nommé LOCC [15], et ces dernières ne peuvent augmenter la quantité d'intrication dans un état à plusieurs corps. Une autre propriété clé de l'intrication, comme mentionné précédemment, est que tous les états séparables ne sont pas intriqués, et finalement, qu'il existe des états maximale-ment intriqués [16]. De ces particularités essentielles découlent des critères que possèdent les bonnes mesures d'intrication. Premièrement, une mesure d'intrication doit être nulle pour un état séparable [16] [17]. Ensuite, les opérations de LOCC n'augmentent pas la valeur de la mesure d'intrication, les opérations locales et unitaires ne changent également pas la valeur de cette mesure d'intrication [16] [17]. Les mesures d'intrication se doivent aussi d'être additives : si plusieurs copies d'un même état sont séparées entre deux laboratoires, alors la mesure d'intrication $E(\rho)$ doit se comporter de manière à ce que $E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$. Dans le cas de deux états différents on trouve [16] [17]

$$E(\rho_1 \otimes \rho_2) = E(\rho_1) + E(\rho_2). \quad (1.2.1)$$

On peut également dire d'une mesure d'intrication qu'elle est subadditive si

$$E(\rho^{\otimes n}) \leq nE(\rho). \quad (1.2.2)$$

Il existe d'autres critères tels que la convexité et la continuité asymptotique, mais ce ne sont pas toutes les mesures d'intrication qui les possèdent, les critères essentiels sont les deux premiers mentionnés (un état séparable doit avoir une mesure d'intrication nulle et les LOCCs n'augmentent pas la valeur d'une mesure d'intrication) [17].

1.2.1. Entropie de von Neumann

Pour un état pur et bipartite $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, l'entropie de von Neumann caractérise le degré d'intrication entre les deux parties du système étudié. Cette quantité est définie telle que

$$S_{vN}(\rho_A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A, \quad (1.2.3)$$

où ρ_A est la matrice densité réduite du système A [18]. Cette matrice densité réduite ne décrit pas nécessairement un état pur. Pour calculer cette dernière, il suffit de prendre la trace partielle sur le sous-espace B de la matrice densité ρ du système, de manière à ce que

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.2.4)$$

L'entropie de von Neumann a son minimum à 0 si et seulement si ρ_A décrit un état pur, ce qui est équivalent à un état $|\psi\rangle$ séparable. S_{vN} est également bornée vers le haut par $\log d$, où d est la dimension de l'espace de Hilbert. Cette borne supérieure est atteinte lorsque ρ_A est maximalelement mixte, soit lorsque le système est décrit comme un mélange stochastique d'états équiprobables. Sa matrice densité réduite est alors proportionnelle à l'identité.

Il est également à noter que l'entropie de von Neumann est additive, soit pour deux matrices densité ρ et σ agissant sur deux espaces de Hilbert indépendants,

$$S_{vN}(\rho \otimes \sigma) = S_{vN}(\rho) + S_{vN}(\sigma). \quad (1.2.5)$$

Une autre propriété utile de l'entropie de von Neumann est la subadditivité. L'entropie du système entier est plus petite ou égale que la somme des entropies de chaque sous-système [19]:

$$S_{vN}(\rho_{AB}) \leq S_{vN}(\rho_A) + S_{vN}(\rho_B). \quad (1.2.6)$$

1.2.2. Entropie de Rényi

Pour un état pur et bipartite $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, l'entropie de Rényi est définie telle que [20]

$$S_\alpha(\rho_A) = \frac{1}{1-\alpha} \log(\text{Tr} \rho_A^\alpha), \quad \alpha \in (0,1) \cup (1, \infty). \quad (1.2.7)$$

Un cas limite important est celui où $\alpha \rightarrow 1$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha(\rho_A) = S_{vN}(\rho_A), \quad (1.2.8)$$

on y retrouve l'entropie de von Neumann précédemment définie [21].

Les entropies de Rényi sont à leur valeur minimum, soit 0, lorsque ρ_A est un état pur. Elles sont également bornées vers le haut par $\log d$ où d est la dimension de l'espace de Hilbert lorsque ρ_A est maximalelement mixte.

Les entropies de Rényi sont aussi additives, soit, pour deux matrices densité ρ et σ , elles obéissent à

$$S_\alpha(\rho \otimes \sigma) = S_\alpha(\rho) + S_\alpha(\sigma). \quad (1.2.9)$$

Elles se distinguent cependant de l'entropie de von Neumann par le fait qu'elles ne sont pas subadditives [22].

1.2.3. Négativité et négativité logarithmique

Considérons un système dont l'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_B$. Alors que l'on souhaite investiguer les corrélations se trouvant entre les régions A_1 et A_2 , il est primordial de se rappeler que l'état formé de ces deux régions n'est pas nécessairement pur. Les mesures d'intrications décrites dans les sections précédentes ne sont pas appropriées pour ce problème. Il incombe donc d'introduire de nouvelles mesures d'intrication pour les états mixtes, soit la négativité, et sa proche voisine, la négativité logarithmique.

Déterminer si un état mixte peut être écrit sous forme de l'Équation (1.1.5) est un problème qui s'avère être NP-difficile [23]. Pour pallier à ce problème, il est utile d'introduire le critère de transposée partielle positive (PPT, de l'anglais *Positive Partial Transpose*).

En premier lieu, pour une matrice densité

$$\rho_A = \sum_{ijkl} p_{ijkl} |\phi_i^{A_1}\rangle \langle \phi_j^{A_1}| \otimes |\phi_k^{A_2}\rangle \langle \phi_l^{A_2}| \quad (1.2.10)$$

agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2}$, la transposée partielle sur le sous-espace A_1 (T_1) est définie telle que

$$\rho_A^{T_1} = (T \otimes \mathbb{I})\rho_A = \sum_{ijkl} p_{ijkl} (|\phi_i^{A_1}\rangle \langle \phi_j^{A_1}|)^T \otimes |\phi_k^{A_2}\rangle \langle \phi_l^{A_2}| = \sum_{ijkl} p_{ijkl} |\phi_j^{A_1}\rangle \langle \phi_i^{A_1}| \otimes |\phi_k^{A_2}\rangle \langle \phi_l^{A_2}|. \quad (1.2.11)$$

Suite à cette opération, le critère de PPT stipule que si l'état est séparable, toutes ses valeurs propres sont positives. Ainsi, si suite à l'opération de PPT, l'état possède des valeurs propres négatives, alors ce dernier est intriqué. Pour des systèmes de dimensions 2×2 et 2×3 le critère de PPT est suffisant pour déterminer la séparabilité d'un état [24].

En définissant les valeurs propres de la matrice $\rho_A^{T_1}$ en tant que λ_i , la négativité est la valeur absolue de la somme des λ_i négatifs :

$$\mathcal{N}(\rho_A) = \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i|. \quad (1.2.12)$$

Une définition équivalente est

$$\mathcal{N}(\rho_A) = \frac{\|\rho_A^{T_1}\|_1 - 1}{2}, \quad (1.2.13)$$

où $\|X\|_1 = \text{Tr}\sqrt{XX^\dagger}$ [25].

À partir de la négativité, une quantité analogue, la négativité logarithmique peut être définie

$$\mathcal{E}_b(\rho_A) = \log(2\mathcal{N}(\rho_A) + 1) = \log\|\rho_A^{T_1}\|_1. \quad (1.2.14)$$

Si $\mathcal{E}_b > 0$, alors l'état est intriqué. La négativité logarithmique est bornée vers le bas lorsque $\mathcal{E}_b = 0$. Cependant, un état possédant cette caractéristique n'est pas nécessairement séparable, mais tous les états séparables ont $\mathcal{E}_b = 0$.

Il est pertinent de noter que dans le cas d'un système décrit par un état pur bipartite appartenant à l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, la négativité logarithmique se simplifie et est égale à l'entropie de Rényi $\frac{1}{2}$, soit $\mathcal{E}_b(\rho_{AB}) = S_{\frac{1}{2}}(\rho_A)$ [25].

La négativité logarithmique s'avère être une mesure d'intrication qui est monotone sous les opérations de LOCC, est additive et est nulle pour un état séparable [26]. Malgré le fait qu'elle n'est pas convexe, elle répond aux principaux critères qui qualifient une bonne mesure d'intrication. L'avantage net de la négativité logarithmique est que c'est une mesure d'intrication qui est facilement calculable et a comme interprétation d'être la borne supérieure de l'intrication de distillation [26], qui est une mesure quantifiant le nombre d'états singulet qui peuvent être extraits d'un état mixte [27].

Chapitre 2

Chaînes de spin

En physique statistique, les chaînes de spin décrivent un modèle unidimensionnel de particules interagissant entre elles. Historiquement, ces modèles ont été développés dans le but d'avoir une description cohérente du magnétisme observé dans certains matériaux. Une des premières chaînes étudiées fut le modèle d'Ising, qui offre une description simple du ferromagnétisme. La version unidimensionnelle de ce modèle fut résolue analytiquement par Ernst Ising en 1924 [28]. Dans un même lignée, le modèle d'Heisenberg XXX, qui offre une description à la fois du ferromagnétisme et de l'antiferromagnétisme tout dépendant de l'un de ses paramètres a été résolu par Hans Bethe en 1931, donnant lieu au célèbre ansatz de Bethe [29]. Il existe une multitude d'autres modèles qui ont été étudiés depuis. Celui qui est abordé dans ce mémoire, le modèle XX pour spin $\frac{1}{2}$, est un système dit de fermions libres. Ces systèmes sont caractérisés par des Hamiltoniens ayant des termes quadratiques d'opérateurs fermioniques, et ont la propriété d'être intégrables.

2.1. Modèle XX

Le modèle XX avec champ transverse est une théorie qui permet de modéliser une transition de phase quantique, mais qui est également un système intégrable, d'où le principal intérêt de son étude [30]. Ce modèle décrit une chaîne de $N + 1$ spins $\frac{1}{2}$, où les sites sont étiquetés, par convention, de 0 à N . Pour un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$, l'Hamiltonien qui régit ce modèle est

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} J_n (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N B_n \sigma_n^z \quad (2.1.1)$$

où les σ_n^j sont les matrices de Pauli agissant sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_n . J_n et B_n sont des constantes réelles. À titre indicatif, l'état fondamental de ce modèle pour des couplages et champ magnétique externe homogènes ainsi qu'à grand N subit une transition de phase

lorsque $B = 2J$ [31]. À l'aide d'une transformation de Jordan-Wigner, il est possible de définir des opérateurs de création et d'annihilation fermioniques tels que

$$c_n^\dagger = \prod_{j=0}^{n-1} \sigma_j^z \sigma_n^+, \quad c_n = \prod_{j=0}^{n-1} \sigma_j^z \sigma_n^-, \quad (2.1.2)$$

où $\sigma_n^+ = \frac{\sigma_n^x + i\sigma_n^y}{2}$ et $\sigma_n^- = \frac{\sigma_n^x - i\sigma_n^y}{2}$, pour ensuite réécrire l'Hamiltonien sous la forme

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} J_n (c_{n+1}^\dagger c_n + c_n^\dagger c_{n+1}) - \sum_{n=0}^N B_n c_n^\dagger c_n = \sum_{m,n=0}^N c_m^\dagger \Lambda_{mn} c_n. \quad (2.1.3)$$

Les opérateurs fermioniques $c_n^{(\dagger)}$ obéissent aux relations d'anticommutation habituelles

$$\{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij}, \quad \{c_i, c_j\} = 0. \quad (2.1.4)$$

2.1.1. Diagonaliser l'Hamiltonien

Por étudier ce modèle, commençons par diagonaliser son Hamiltonien en vue de trouver ses valeurs et vecteurs propres. Comme effectué dans [32], commençons par faire agir Λ sur la base orthonormale des positions $\{|0\rangle, |1\rangle \dots |N\rangle\}$ appartenant à \mathbb{C}^{N+1} :

$$\Lambda|n\rangle = J_{n-1}|n-1\rangle - B_n|n\rangle + J_n|n+1\rangle, \quad (2.1.5)$$

où $0 \leq n \leq N$. Manifestement, cet Hamiltonien n'a pas la forme diagonale recherchée

$$\Lambda|\omega_k\rangle = \omega_k|\omega_k\rangle \quad (2.1.6)$$

où les états $|\omega_k\rangle$ forment une base orthonormale de \mathbb{C}^{N+1} et les ω_k sont les $N+1$ valeurs propres de Λ . Il faut donc effectuer un changement de base tel que

$$|\omega_k\rangle = \sum_{n=0}^N \phi_n(\omega_k)|n\rangle, \quad (2.1.7)$$

où les $\phi_n(\omega_k)$ sont les fonctions propres qui seront à déterminer. Ces fonctions doivent cependant obéir à la relation d'orthonormalité

$$\sum_{n=0}^N \phi_n(\omega_k)\phi_n(\omega_p) = \delta_{kp}, \quad (2.1.8)$$

ainsi qu'à la relation de récurrence

$$\omega_k \phi_n(\omega_k) = J_n \phi_{n+1}(\omega_k) - B_n \phi_n(\omega_k) + J_{n-1} \phi_{n-1}(\omega_k), \quad (2.1.9)$$

comme le nécessite l'Équation (2.1.5). Il est aussi utile de noter que ces fonction propres sont réelles.

Pour terminer de diagonaliser l'Hamiltonien, il ne reste qu'à définir de nouveaux opérateurs de création et d'annihilation fermioniques

$$\tilde{c}_k = \sum_{n=0}^N \phi_n(\omega_k) c_n, \quad \tilde{c}_k^\dagger = \sum_{n=0}^N \phi_n(\omega_k) c_n^\dagger. \quad (2.1.10)$$

Ces derniers obéissent aux relations d'anticommutations habituelles des fermions, soit $\{\tilde{c}_i^\dagger, \tilde{c}_j\} = \delta_{ij}$. À partir de ces définitions, il est possible de réécrire l'Hamiltonien sous sa forme diagonale

$$H = \sum_{k=0}^N \omega_k \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k. \quad (2.1.11)$$

Les vecteurs propres de ce modèles sont données par

$$|\psi\rangle = \tilde{c}_{k_1}^\dagger \dots \tilde{c}_{k_r}^\dagger |0\rangle, \quad (2.1.12)$$

où $k_i \in \{0, \dots, N\}$ et $|0\rangle$ est l'état du vide annihilé par n'importe quel opérateur fermionique \tilde{c}_k de manière à ce que $\tilde{c}_k |0\rangle = 0$. Ceci implique que les énergies propres sont

$$E = \sum_{i=0}^r \omega_{k_i} \quad (2.1.13)$$

Subséquentement, l'état fondamental est décrit par

$$|\psi_0\rangle = \tilde{c}_0^\dagger \dots \tilde{c}_K^\dagger |0\rangle \quad (2.1.14)$$

où K est le plus grand entier avant d'atteindre l'impulsion de Fermi. Le système est rempli graduellement avec des particules qui viennent occuper les états de plus basses énergies jusqu'à ce que l'énergie de Fermi E_f soit atteinte. L'impulsion de Fermi correspond à l'impulsion associée à l'énergie de Fermi. C'est donc l'impulsion de la particule ayant la plus haute énergie dans la chaîne.

2.1.2. Chaîne homogène

La chaîne homogène est caractérisée par $J_n = 1$ et $B_n = 0$. L'Hamiltonien de cette chaîne est donc

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} \left(c_{n+1}^\dagger c_n + c_n^\dagger c_{n+1} \right) = \sum_{i,j=0}^N c_i^\dagger \Lambda_{ij} c_j \quad (2.1.15)$$

où la matrice Λ a la forme tridiagonale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.16)$$

dans la base des positions. Pour des raisons de convention, il a été choisi que pour cette variante du modèle, les sites sont étiquetés de 1 à N .

À l'aide de la forme de la matrice de l'Équation (2.1.16), il est possible de remarquer que les fonctions propres sont liées entre elles par

$$\phi_{n-1}(\omega_k) + \phi_{n+1}(\omega_k) = \omega_k \phi_n(\omega_k). \quad (2.1.17)$$

En posant l'ansatz

$$\phi_n(\omega_k) = Ae^{ikn} + Be^{-ikn}, \quad (2.1.18)$$

ainsi qu'en imposant les conditions frontières de la chaîne ouverte de manière à ce que

$$\phi_{-1}(\omega_k) = 0 = \phi_{N+1}(\omega_k), \quad (2.1.19)$$

il est possible de trouver que les valeurs propres sont [33] [34]

$$\omega_k = 2 \cos \left(\frac{(k+1)\pi}{N+2} \right). \quad (2.1.20)$$

Subséquentement, les fonction propres sont données par

$$\phi_n(\omega_k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left(\frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+2} \right). \quad (2.1.21)$$

Il est également possible de trouver les fonctions propres pour la chaîne homogène à partir des polynômes de Chebyshev. Cette démarche est effectuée dans [32].

2.1.3. Chaîne inhomogène

Le cas de la chaîne inhomogène est quelque peu différent: le but est de judicieusement choisir les paramètres J_n et B_n qui permettront d'obtenir des fonction propres données par des polynômes orthogonaux discrets.

Comme effectué dans [32], commençons par introduire les polynômes orthogonaux du schéma d'Askey. Ces derniers, dénotés $R_n(\lambda(x))$ sont de degré n par rapport à la variable

$\lambda(x)$ et où $x, n = 0, 1, \dots, N$. Comme leur nom l'indique, ces polynômes obéissent à la relation d'orthogonalité [35] [36]

$$\sum_{x=0}^N W(x) R_m(\lambda(x)) R_n(\lambda(x)) = U_n \delta_{mn}, \quad (2.1.22)$$

où $W(x)$ est le poids et U_n la normalisation, qui sont tous deux positifs et dépendent du type de polynôme choisi. Par convention, ces polynômes orthogonaux ont la normalisation $R_0(\lambda(x)) = 1$. Les polynômes orthogonaux du schéma d'Askey satisfont également la relation de récurrence

$$\lambda(x) R_n(\lambda(x)) = A_n R_{n+1}(\lambda(x)) - (A_n + C_n) R_n(\lambda(x)) + C_n R_{n-1}(\lambda(x)), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (2.1.23)$$

Cette relation de récurrence, lorsque ses paramètres sont judicieusement choisis, rappelle l'Équation (2.1.9). Puis, posons [32]

$$R_n(\lambda(x)) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{W_k}} \phi_n(\omega_k). \quad (2.1.24)$$

Par identification, on décale

$$J_{n-1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} A_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} C_n, \quad k = x, \quad \omega_k = \lambda(x), \quad W_k = W(x). \quad (2.1.25)$$

Les α_n peuvent être trouvés par récursion, ce qui permet d'établir

$$\alpha_n = \alpha_0 \epsilon^n \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{C_k}{A_{k-1}}}, \quad (2.1.26)$$

et finalement obtenir

$$J_n = \epsilon \sqrt{A_n C_{n+1}}, \quad B_n = A_n + C_n, \quad (2.1.27)$$

où $\epsilon = \pm 1$.

Les paramètres J_n et B_n sont désormais explicitement liés au choix de polynôme orthogonal qui diagonalise l'Hamiltonien.

2.1.3.1. Chaîne de Krawtchouk

Le principal cas étudié dans cet ouvrage est celui de la chaîne inhomogène dont les fonction propres sont données par les polynômes de Krawtchouk. Ces derniers sont définis à l'aide d'une fonction hypergéométrique par [35] [36]

$$R_n(\lambda(x)) = K_n(x,p,N) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, & -x & 1 \\ & -N & p \end{matrix} ; \frac{1}{p} \right), \quad (2.1.28)$$

où $\lambda(x) = -x$, $0 \leq x, n < N$ et $0 < p < 1$. Il est utile de noter que ces polynômes ont la propriété $K_n(x,p,N) = K_x(n,p,N)$.

Les coefficients A_n et C_n de la relation de récurrence de ces polynômes sont donnés par

$$A_n = p(N - n), \quad C_n = n(1 - p). \quad (2.1.29)$$

Cela signifie que les coefficients J_n et B_n de l'Hamiltonien sont

$$J_n = \sqrt{(N - n)(n + 1)p(1 - p)}, \quad B_n = -[Np + n(1 - 2p)], \quad (2.1.30)$$

et que les coefficients α_n données par l'Équation (2.1.26) sont

$$\alpha_n = \binom{N}{n}^{-1/2}. \quad (2.1.31)$$

Les poids et normalisations associés aux polynômes de Krawtchouk sont [35] [36]

$$W(x) = \binom{N}{x} p^x (1 - p)^{N-x}, \quad U_n = \left(\frac{1 - p}{p} \right)^n \binom{N}{n}^{-1}. \quad (2.1.32)$$

Ensuite, avec l'aide de l'Équation (2.1.24), les fonctions propres sont

$$\phi_n(\omega_k) = (-1)^n 2^{-\frac{N}{2}} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{k}} K_n(k,p,N). \quad (2.1.33)$$

Il est utile de noter que les polynômes $R_n(\lambda(x))$ suivent une relation d'orthogonalité (Équation (2.1.22)), et non d'orthonormalité comme celle des fonctions propres (Équation (2.1.8)). Il est donc utile de définir des fonctions propres normalisées

$$\phi_n(x) = (-1)^x \sqrt{\frac{W(x)}{U_n}} K_n(x,p,N). \quad (2.1.34)$$

Plus explicitement,

$$\phi_n(x) = (-1)^x \sqrt{\left(\frac{p}{1-p} \right)^{x+n} (1-p)^N \binom{N}{x} \binom{N}{n}} K_n(x,p,N). \quad (2.1.35)$$

Il est à noter que ce modèle a une spectre linéaire correspondant à n , et l'état fondamental est donné par

$$|\psi\rangle = \tilde{c}_0^\dagger \dots \tilde{c}_K^\dagger |0\rangle, \quad (2.1.36)$$

où K est l'impulsion de Fermi et où les opérateurs fermioniques \tilde{c}_n^\dagger sont définis à l'aide de l'Équation (2.1.10) ainsi que des fonctions propres de l'Équation (2.1.35).

Chapitre 3

Négativité logarithmique pour fermions libres

Maintenant que le système étudié est bien défini, le but est de décrire l'intrication dans la chaîne de Krawtchouk. Précédemment, l'intrication entre deux régions complémentaires de ce système a été étudiée à l'aide de l'entropie de von Neumann [11]. Le cas plus délicat de l'intrication entre deux régions non-complémentaires de la chaîne de Krawtchouk est l'objet de cet ouvrage. Comme mentionné à la Section 1.2.3, la négativité et la négativité logarithmique sont des mesures d'intrication appropriées pour étudier les corrélations quantiques entre deux régions non-complémentaires d'une même chaîne. De manière plus concrète, la Figure 3.1 décrit la géométrie de la chaîne étudiée : le but est d'investiguer les corrélations quantiques contenues entre les régions A_1 et A_2 , qui, ensemble, forment la région A . La région B contient le reste de la chaîne.

3.1. Matrice de corrélation et fermions libres

Comme décrit à la Section 1.2.3, la négativité logarithmique se calcule à partir des valeurs propres de la matrice densité réduite du système $A = A_1 \cup A_2$. Cependant, pour une région A contenant n sites, la taille de cette matrice est de $2^n \times 2^n$. Diagonaliser une matrice densité réduite pour un système comprenant un nombre substantiel de sites devient rapidement ardu. Cependant, une particularité des états de fermions libre, également nommé états Gaussiens, permet de résoudre ce problème. Les états propres de ce type de système sont

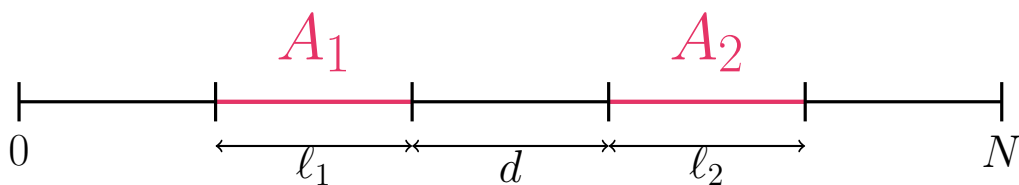


Fig. 3.1. Géométrie tripartite de la chaîne ouverte de Krawtchouk.

des déterminants de Slater, ce qui signifie que la matrice densité réduite doit être de la forme thermodynamique $\rho_A = \kappa \exp(-\mathcal{H})$, où \mathcal{H} est l'Hamiltonien d'intrication défini tel que $\mathcal{H} = \sum_{m,n \in A} h_{mn} c_m^\dagger c_n$, et où κ est une constante de normalisation telle que $\kappa = \text{Tr} \exp(-\mathcal{H})$. Il a été prouvé que ces états satisfont au théorème de Wick, et que toutes les fonctions de corrélation à N-points qu'ils contiennent se factorisent pour être réexprimés en terme de fonctions de corrélations à 2 points [37]. Il est possible de construire une matrice dite de corrélation pour le système A à partir de ces fonctions de corrélation à deux points. Ses éléments sont donnés par

$$[\mathcal{C}_A]_{mn} = \text{Tr}(\rho_A c_m^\dagger c_n) = \langle c_m^\dagger c_n \rangle, \quad (3.1.1)$$

où les indices m, n se limitent aux sites appartenant à la région $A = A_1 \cup A_2$.

Les valeurs propres de cette matrice de corrélation (ν_j) sont reliées à celles de la matrice h par $\nu_j = (\exp(\xi_j) + 1)^{-1}$, où les ξ_j sont les valeurs propres de h [37].

Une manière plus évocatrice d'écrire les entrées de la matrice de corrélation en terme des fonctions propres de l'Hamiltonien est [32]

$$[\mathcal{C}_A]_{mn} = \sum_{k=0}^K \phi_m(\omega_k) \phi_n(\omega_k). \quad (3.1.2)$$

Vu la géométrie du problème, les indices m, n sont restreint à la région $A = A_1 \cup A_2$, ce qui donne lieu à une matrice de corrélation ayant la structure en bloc suivante

$$\mathcal{C}_A = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Ici, les blocs \mathcal{C}_{ij} de taille $(\ell_i \times \ell_j)$, décrivent les corrélations entre deux blocs de spins de taille ℓ_i and ℓ_j situés dans A_i et A_j respectivement. Les entrées de chaque éléments de ces blocs sont données par (3.1.2), où les indices m et n sont restreint à A_i et A_j respectivement pour chaque bloc. Pour un sous-système A contenant n sites, la matrice de corrélation sera de taille $n \times n$, ce qui confère tout l'avantage de cet outil pour l'étude des systèmes de fermions libres [38].

3.2. Négativité fermionique

La Section 1.2.3, introduit la négativité logarithmique, une mesure d'intrications basée sur le critère de PPT. Cette définition est tout à fait appropriée pour des systèmes bosoniques. Cependant, lorsque le système à l'étude est constitué de fermions, l'opération de transposée partielle est plus délicate en raison des relation d'anticommutation des fermions qui peuvent faire émerger une structure de signe. Dans le cas d'états Gaussiens fermioniques,

la transposée partielle transforme ces états en états non-Gaussiens. Il a été prouvé dans [39], qu'avec un choix de base approprié, la transposée partielle d'un état Gaussien pouvait être représentée par une combinaison linéaire de deux opérateurs Gaussiens, ce qui permet de donner une borne supérieure à la négativité logarithmique bosonique.

À cet effet, reprenons brièvement les démarches effectuées dans [39] et définissons la matrice de covariance associée à l'opérateur Gaussien ρ_A : $J_A = 2\mathcal{C}_A - \mathbb{I}$, qui a la même structure en bloc que (3.1.3)

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Subséquentement, il est possible de réécrire l'opérateur $\rho_A = \rho_+ + \rho_-$, où

$$\rho_+ = \frac{1}{2}(\rho_A + P_2\rho_AP_2), \quad \rho_- = \frac{1}{2}(\rho_A - P_2\rho_AP_2). \quad (3.2.2)$$

Ici, P_2 est l'opérateur de parité sur le sous-espace de A_2 . Pour une sous-espace donnée, l'opérateur de parité, dans la base de Majorana ($a_{2m-1} = c_m^\dagger + c_m$ et $a_{2m} = i(c_m - c_m^\dagger)$), et pour un sous-système à M sites est défini par

$$P = i^N \prod_{n=1}^{2M} a_n. \quad (3.2.3)$$

Par linéarité de la transposée partielle,

$$\rho_A^{T_2} = \rho_+^{T_2} + \rho_-^{T_2}. \quad (3.2.4)$$

Par la suite, définissons les opérateurs Gaussiens O_+ et O_- associés aux matrices de covariance

$$J_\pm = \begin{pmatrix} J_{11} & \pm iJ_{12} \\ \pm iJ_{21} & -J_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Suite à ces définitions, les auteurs de [39] montrent que $\rho_+^{T_2}$ et $\rho_-^{T_2}$ peuvent être réécrits en terme des opérateurs O_+ et O_- , tels que

$$\rho_+^{T_2} = \frac{1}{2}(O_+ + O_-), \quad \rho_-^{T_2} = \frac{i}{2}(O_- - O_+). \quad (3.2.6)$$

Ceci amène directement à

$$\rho_A^{T_2} = \frac{1-i}{2}O_+ + \frac{1+i}{2}O_-. \quad (3.2.7)$$

Par l'inégalité du triangle [40] [41],

$$\|\rho_A^{T_2}\|_1 \leq \left\| \frac{1-i}{2}O_+ \right\|_1 + \left\| \frac{1+i}{2}O_- \right\|_1 = \sqrt{2}\|O_+\|_1, \quad (3.2.8)$$

ce qui implique que la négativité logarithmique bosonique est bornée par

$$\mathcal{E}_b \leq \log(\text{Tr}\sqrt{O_+O_-}) + \log\sqrt{2}. \quad (3.2.9)$$

Les premiers travaux sur la négativité ([39], [40], [42], [43] et [44]) utilisaient la définition bosonique de la transposée partielle et ignoraient les signes négatifs qui émergeaient lors de la procédure, ceci était équivalent à effectuer une transformation de Jordan-Wigner puis d'effectuer la transposition partielle. Cependant, il a été montré que l'utilisation de la transposée partielle pour calculer la négativité logarithmique pour des systèmes fermioniques échouait à prendre en compte certaines corrélations fermioniques quantiques. Entre autres, cette définition ne détecte pas l'intrication dans la phase topologique de la chaîne de Kitaev [45].

Pour pallier à ce problème, Shapourian et Ryu ont introduit en 2017 une nouvelle définition de la négativité logarithmique pour des fermions basée sur le renversement du temps partiel, plutôt que sur la transposée partielle de l'homologue bosonique [46].

Pour des systèmes bosoniques, il s'avère que l'opération de transposée partielle a une interprétation géométrique qui correspond au renversement du temps partiel, ou même une réflexion miroir dans l'espace des phases [47]. Il semble donc naturel de tenter de généraliser la définition de la négativité logarithmique fermionique par le biais de cette piste. Les développements suivants reprennent ceux de [46].

L'opération de renversement du temps \mathcal{T} envoie un temps t à $-t$. Pour appliquer cette définition à un système de fermions, commençons par étudier le cas d'un système à un seul site possédant les opérateurs de création et d'annihilation fermioniques f^\dagger et f , qui obéissent aux relations d'anticommutation fermioniques habituelles $\{f^\dagger, f\} = 1$. Dans la base des états cohérents, soit la base des états propres de l'opérateur d'annihilation ($f|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$), $|\xi\rangle = \exp(-\xi f^\dagger)|0\rangle$ et $\langle\bar{\xi}| = \langle 0|\exp(-\bar{\xi}f)$, l'opération de renversement du temps R est définie comme

$$|\xi\rangle\langle\bar{\xi}| \rightarrow |i\bar{\xi}\rangle\langle i\xi| := U(|\xi\rangle\langle\bar{\xi}|)^R U^\dagger \quad (3.2.10)$$

où ξ est une variable de Grassmann et U est la partie unitaire de l'opération de renversement du temps $\mathcal{T} = UK$, où \mathcal{K} est l'opération de conjugaison complexe. Il est à noter que le renversement du temps n'est pas qu'une simple transposition, mais il y a également l'ajout d'un i qui provient des relations d'anticommutation des variables de Grassmann ($\{\xi, \bar{\xi}\} = 0$), qui est requis pour conserver la trace de la matrice densité suite à l'opération de renversement du temps.

Il est désormais possible d'étendre cette définition à des systèmes à plusieurs sites. En effectuant une tripartition du système à l'étude, soit pour un système ayant l'espace de

Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_B$ et pour lequel on souhaite appliquer le renversement du temps seulement sur le sous-espace de A_1 , l'opération du renversement du temps est

$$U_{A_1}(|\{\xi_j\}_{j \in A_1}, \{\xi_j\}_{j \in A_2}\rangle\langle\{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_1}, \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_2}|)^{R_1} U_{A_1}^\dagger = U_{A_1}(|\{i\bar{\chi}_j\}_{j \in A_1}, \{\xi_j\}_{j \in A_2}\rangle\langle\{i\xi_j\}_{j \in A_1}, \{\bar{\chi}_j\}_{j \in A_2}|)^{R_1} U_{A_1}^\dagger. \quad (3.2.11)$$

Les états cohérents à plusieurs particules sont définis comme $|\{\xi_j\}\rangle = \exp(-\sum_j \xi_j f_j^\dagger)|0\rangle$ et $\langle\{\bar{\chi}_j\}| = \langle 0| \exp(-\sum_j f_j \bar{\chi}_j)$. Il est également utile de noter que la partie unitaire de la transformation, U_{A_1} , dépend du choix de base, il est donc possible d'écrire la négativité logarithmique fermionique comme

$$\mathcal{E}_f = \log \|\rho_{A_1, A_2}^{R_1}\|_1, \quad (3.2.12)$$

où $\|X\|_1 = \text{Tr}\sqrt{XX^\dagger}$.

Il est aussi possible d'exprimer l'opération de renversement du temps partiel dans la base du nombre d'occupation $|\alpha_1\rangle$ et $|\beta_2\rangle$ des sous-systèmes A_1 et A_2 respectivement, qui sont définis de manière à ce que

$$|\alpha_1\rangle = \prod_{j \in A_1} (c_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad |\beta_2\rangle = \prod_{j \in A_2} (c_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad (3.2.13)$$

où n_j correspond au nombre de fermions au site j (soit 0 ou 1) et où $|0\rangle$ correspond à l'état du vide annihilé par $c_j|0\rangle = 0$. Il est par la suite possible de définir les nombres d'occupation des régions A_1 et A_2 respectivement tels que $\tau_1 = \sum_{j \in A_1} n_j$ et $\tau_2 = \sum_{j \in A_2} n_j$. En terme de ces variables, le renversement partiel du temps sur le sous-système A_1 est [46]

$$\left(|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle\langle\bar{\alpha}_1|\langle\bar{\beta}_2|\right)^{R_1} = (-1)^{\phi(\{n_j\}, \{\bar{n}_j\})} |\bar{\alpha}_1\rangle|\beta_2\rangle\langle\alpha_1|\langle\bar{\beta}_2|, \quad (3.2.14)$$

où la phase $\phi(\{n_j\}, \{\bar{n}_j\})$ est donnée par

$$\phi(\{n_j\}, \{\bar{n}_j\}) = \frac{\tau_1(\tau_1 + 2)}{2} + \frac{\bar{\tau}_1(\bar{\tau}_1 + 2)}{2} + \tau_2\bar{\tau}_2 + \tau_1\tau_2 + \bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 + (\tau_1 + \tau_2)(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2). \quad (3.2.15)$$

Maintenant, attardons nous au calcul de négativité logarithmique pour un système de fermions libres. Comme mentionné à l'Équation (3.2.1), la matrice de covariance J_A est associée à l'opérateur ρ_A .

Puisque l'opération de renversement du temps partiel modifie les valeurs propres ν_j de la matrice de covariance associée à ρ_A , il est de mise de définir les matrices de covariances J_+ et J_- associées aux matrices densité réduites $\rho_A^{R_1}$ et $(\rho_A^{R_1})^\dagger$. Ce sont exactement les mêmes que celles définies à l'Équation (3.2.5)

Subséquentement, la matrice de covariance J_x dont les valeurs propres sont dénotées ν_j^x , et qui est associée au produit $\rho_A^{R_1} (\rho_A^{R_1})^\dagger$ est

$$J_x = (\mathbb{I} + J_+ J_-)(J_+ + J_-). \quad (3.2.16)$$

À la lumière de ces informations, la négativité logarithmique est explicitée [48], [49], [50], [51]

$$\mathcal{E}_f = \sum_{j=1}^{\ell_1 + \ell_2} \log \left[\left(\frac{1 + \nu_j^x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1 - \nu_j^x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell_1 + \ell_2} \log \left[\left(\frac{1 + \nu_j}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \nu_j}{2} \right)^2 \right]. \quad (3.2.17)$$

Il est également utile de noter qu'avec derniers développements, ainsi que l'Équation (3.2.9),

$$\mathcal{E}_b \leq \mathcal{E}_f + \log \sqrt{2}. \quad (3.2.18)$$

3.3. Négativité fermionique et théorie conforme des champs

Considérons un système unidimensionnel et tripartite, comme à la Section précédente. Près d'un point critique, ces systèmes peuvent être étudiés à l'aide de la théorie conforme des champs (CFT). La méthode des répliques (*Replica Trick*), permet de trouver le comportement de la négativité logarithmique pour une chaîne infinie dont les deux régions A_1 et A_2 sont adjacentes. Ce dernier est [52], [53]

$$\mathcal{E}_f = \frac{c}{4} \log \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_1 + \ell_2} \right) + b, \quad (3.3.1)$$

où b est une constante et c est la charge centrale de la CFT. Cette dernière est propre au modèle étudié et permet de classifier les systèmes critiques. Par exemple, le modèle XX a une charge centrale de $c = 1$ [2].

Pour le cas d'intervalles disjoints dans une chaîne infinie, et pour une grande séparation d , la négativité logarithmique est [54]

$$\mathcal{E}_f = B \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{d^2} \right)^{2\Delta_f}, \quad (3.3.2)$$

où B est une constante et Δ_f est la dimension d'échelle fermionique. Il est à noter que la constante B peut différer selon le nombre de site dans les régions A_1 et A_2 . Par exemple, le coefficient B pour des régions squelettiques ($\ell_1 = \ell_2 = 1$) est différent de celui pour des régions pleines ($\ell_i \neq 1$) [55].

Chapitre 4

Fermionic logarithmic negativity in the Krawtchouk chain

Par Gabrielle Blanchet, Gilles Perez et Luc Vinet.

Soumis dans le Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.

Disponible sur arXiv : <https://www.arxiv.org/abs/2408.16531>

4.1. Introduction

Quantum entanglement plays a central role in the study of quantum many-body systems, both in and out of equilibrium [5, 56]. In particular, various measures of entanglement display singular behaviour in the vicinity of quantum phase transitions, hence allowing for their detection and characterization [2–4, 57].

In the context of bipartite quantum systems $A \cup B$ in a pure state $|\psi\rangle$, the canonical entanglement measure is the celebrated *entanglement entropy* S_A . It is defined as

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A), \quad \rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|), \quad (4.1.1)$$

where ρ_A is the reduced density matrix of subsystem A . In one-dimensional quantum critical systems described by conformal field theories (CFT), the entanglement entropy of an interval of length ℓ embedded in an infinite system reads [57, 58]

$$S_A = \frac{c}{3} \log \ell + a, \quad (4.1.2)$$

where c is the central charge of the underlying CFT and a is a non-universal constant. In stark contrast, the ground-state entanglement entropy of gapped Hamiltonians obeys an area law [59–61].

In numerous situations, it is also relevant to quantify entanglement between subsystems which are not described by a pure state. For example, in a tripartite system $A_1 \cup A_2 \cup B$, the composite system $A_1 \cup A_2$ is described by a mixed reduced density matrix ρ_{A_1, A_2} . In

this situation, the entanglement entropy S_{A_1} does not properly quantify the entanglement between A_1 and A_2 , because it also depends on the entanglement between A_1 and B . Instead, one uses the *logarithmic negativity* [25, 26]. This entanglement measure is based on the positive partial transpose (PPT) criterion [14], which is a necessary condition for the density matrix ρ_{A_1, A_2} to be separable, or not entangled. The logarithmic negativity, denoted \mathcal{E} , quantifies the violation of this criterion, and is defined as

$$\mathcal{E} = \log \left\| \left\| \rho_{A_1, A_2}^{T_1} \right\|_1 \right\|. \quad (4.1.3)$$

Here, $\|X\|_1 = \text{Tr}\sqrt{XX^\dagger}$ is the trace norm, and T_1 indicates the partial transposition with respect to A_1 .

For quantum systems with fermionic degrees of freedom, the notion of separability, and hence the definition of entanglement, is affected by the fermionic statistics [62]. As a result, the standard (or bosonic) logarithmic negativity defined above has a number of shortcomings. Most notably, it fails to detect topological phases in the Kitaev chain [46] and vanishes for certain simple fermionic states which are manifestly not separable [45]. For fermionic systems, one thus uses the *fermionic logarithmic negativity* \mathcal{E}_f [45, 46]. It is defined similarly to its bosonic counterpart of Eq. (4.1.3), but where the partial transpose is replaced by the partial time-reversal operation.

Similarly to the entanglement entropy, the logarithmic negativity allows one to detect and characterize quantum critical regimes. For one-dimensional quantum critical systems, both the bosonic and fermionic logarithmic negativity of two adjacent intervals of length ℓ_1 and ℓ_2 embedded in an infinite system scale as [46, 52, 53]

$$\mathcal{E}_{(f)} = \frac{c}{4} \log \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_1 + \ell_2} \right) + b, \quad (4.1.4)$$

where c is the central charge of the underlying CFT and b is a constant. In contrast, the scaling of the logarithmic negativity as a function of the distance for disjoint subsystems strongly differs depending on whether the system has bosonic or fermionic degrees of freedom. For bosonic (or spin) systems, the logarithmic negativity decays faster than any power for CFTs in one [52, 53] and arbitrary dimensions [54]. For finite lattice models, it experiences an entanglement sudden death, i.e., a finite distance beyond which the subsystems become exactly disentangled. This sudden death of entanglement has notably been observed in the transverse-field Ising model [3, 54, 63] and resonating valence-bond (RVB) states [64], indicating that, contrary to common beliefs, these systems do not possess long-range entanglement. In fermionic systems however, there is no sudden death of entanglement. For fermionic CFTs, the logarithmic negativity decays as a power law [54],

$$\mathcal{E}_f = B \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{d^2} \right)^{2\Delta_f}, \quad (4.1.5)$$

for $d \gg \ell_{1,2}$, where B is a constant and Δ_f is the smallest fermionic scaling dimension of the theory. This dichotomy between the entanglement scaling for bosons and fermions at large distances is understood in full generality within the *fate of entanglement* picture [65].

Free-fermion models play an important role in the study of entanglement in many-body systems [37, 48, 49, 66–74]. On the one hand, these models can be studied analytically and with exact numerical methods, and on the other they are relevant to describe and investigate realistic many-body phenomena. While most results regarding entanglement in free-fermion models pertain to spatially homogeneous systems, there is a growing interest for entanglement in inhomogeneous free-fermion systems [11, 32, 75–87]. However, results for the fermionic logarithmic negativity in inhomogeneous free-fermion models are still lacking in the literature. In this article, we initiate this important line of research by considering the negativity in the Krawtchouk chain [11, 32, 80]. This model belongs to a larger family of inhomogeneous models based on orthogonal polynomials from the Askey scheme [35].

This paper is organized as follows. We review the definition and diagonalization of the Krawtchouk chain in Sec. 4.2. In Sec. 4.3, we provide the definition of the fermionic logarithmic negativity, as well as its expression in term of the chopped correlation matrix for free-fermion models. We investigate the properties of the fermionic logarithmic negativity in the Krawtchouk chain for adjacent and disjoint regions in Secs. 4.4 and 4.5, respectively. We offer concluding remarks and perspectives in Sec. 4.6. Various analytical derivations are presented in App. 4.7.

4.2. The Krawtchouk chain

4.2.1. Definition and diagonalization

The Krawtchouk model describes inhomogeneously coupled free fermions on a one-dimensional chain of length $N + 1$ with open boundary conditions. By convention, the sites are labelled from $n = 0$ to $n = N$. The Hamiltonian is

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} J_n \left(c_{n+1}^\dagger c_n + c_n^\dagger c_{n+1} \right) - \sum_{n=0}^N B_n c_n^\dagger c_n \quad (4.2.1)$$

with

$$J_n = \sqrt{(N-n)(n+1)p(1-p)}, \quad B_n = -(Np - n(1-2p)) + \mu, \quad (4.2.2)$$

where $0 \leq p \leq 1$ is a parameter of the model and μ is the chemical potential. The fermionic creation and annihilation operators $c_n^{(\dagger)}$ satisfy the usual anticommutation relations. The

eigenfunctions $\phi_k(n)$ and eigenvalues ω_k of the single-particle Hamiltonian are

$$\phi_k(n) = (-1)^n \sqrt{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n+k} (1-p)^N \binom{N}{n} \binom{N}{k}} K_k(n, p, N), \quad \omega_k = k - \mu, \quad (4.2.3)$$

with $k = 0, 1, \dots, N$, where $K_k(n, p, N)$ are the Krawtchouk polynomials [35],

$$K_k(n, p, N) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, & -k \\ & -N \end{matrix}; \frac{1}{p} \right). \quad (4.2.4)$$

Under the canonical transformation

$$d_k^{(\dagger)} = \sum_{n=0}^N \phi_k(n) c_n^{(\dagger)}, \quad (4.2.5)$$

the Krawtchouk Hamiltonian is recast in the following diagonal form,

$$H = \sum_{k=0}^N \omega_k d_k^\dagger d_k, \quad (4.2.6)$$

allowing for an immediate identification of its eigenvectors.

4.2.2. Ground-state correlation functions

We choose a chemical potential of the form

$$\mu = K + \epsilon, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (4.2.7)$$

where $K > 0$ is an integer, and ϵ is a small positive number which lifts the ground-state degeneracy. With this choice, the single-particle energies satisfy $\omega_K < 0 < \omega_{K+1}$, and therefore the ground state reads

$$|\Psi\rangle = d_0^\dagger d_1^\dagger \cdots d_K^\dagger |0\rangle, \quad (4.2.8)$$

where $|0\rangle$ is the vacuum, with the property that $c_n |0\rangle = 0$ for all $n = 0, 1, \dots, N$. The filling fraction ρ is defined as

$$\rho \equiv \frac{K+1}{N+1}, \quad (4.2.9)$$

and we always consider a fixed, constant filling $\rho > 0$ in the large- N limit.

The ground-state two-point correlation function is defined as $C_{m,n} = \langle \Psi | c_m^\dagger c_n | \Psi \rangle$. In terms of the single-particle eigenfunctions, it reads

$$C_{m,n} = \sum_{k=0}^K \phi_k(m) \phi_k(n) \quad (4.2.10)$$

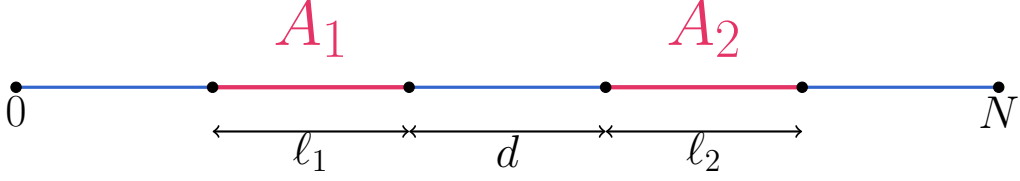


Fig. 4.1. Geometry of a tripartite open chain.

for $m, n = 0, 1, \dots, N$. For $m \neq n$, we use the Christoffel-Darboux formula (see, e.g., Ref. [88]) and rewrite the correlation as

$$C_{m \neq n} = (-1)^{m+n} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\frac{m+n}{2} + K+1} (1-p)^{N+1} \sqrt{\binom{N}{m} \binom{N}{n} \binom{N}{K} (N-K)} \\ \times \frac{K_K(n, p, N) K_{K+1}(m, p, N) - K_K(m, p, N) K_{K+1}(n, p, N)}{n-m}. \quad (4.2.11)$$

4.3. Fermionic negativity in free-fermion models

In this section, we review how the fermionic logarithmic negativity is calculated in free-fermion models. The goal is to investigate the entanglement between two intervals A_1 and A_2 , of respective lengths ℓ_1 and ℓ_2 , embedded in an open chain of length $N+1$ and separated by a distance d . This geometry is illustrated in Fig. 4.1. Moreover, we consider the case where the whole system is in the ground state $|\Psi\rangle$, defined in Eq. (4.2.8). We introduce the reduced density matrix ρ_{A_1, A_2} of the composite system $A_1 \cup A_2$,

$$\rho_{A_1, A_2} = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|), \quad (4.3.1)$$

where B is the complement of $A_1 \cup A_2$. The fermionic logarithmic negativity is defined as [46]

$$\mathcal{E}_f = \log \|\rho_{A_1, A_2}^{R_1}\|_1, \quad (4.3.2)$$

where $\|X\|_1 = \text{Tr}\sqrt{XX^\dagger}$ is the trace norm, and R_1 indicates the partial time reversal on A_1 . This operation is similar to the standard partial transposition, used in the definition of the bosonic logarithmic negativity, see Eq. (4.1.3), but adds a phase which depends on the fermion number in subsystems A_1 and A_2 . In the occupation basis, the partial time reversal operation is defined as follows. Consider basis states $|\alpha_1\rangle$ and $|\beta_2\rangle$ for the system A_1 and A_2 of the form

$$|\alpha_1\rangle = \prod_{j \in A_1} (c_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad |\beta_2\rangle = \prod_{j \in A_2} (c_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \quad (4.3.3)$$

with occupation numbers $f_1 = \sum_{j \in A_1} n_j$ and $f_2 = \sum_{j \in A_2} n_j$, and $n_j = 0, 1$. The partial time reversal operation is then defined as [46]

$$R_1 \left(|\alpha_1\rangle |\beta_2\rangle \langle \tilde{\alpha}_1| \langle \tilde{\beta}_2| \right) = (-1)^{\phi(\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\})} |\tilde{\alpha}_1\rangle |\beta_2\rangle \langle \alpha_1| \langle \tilde{\beta}_2| \quad (4.3.4)$$

where the phase is

$$\phi(\{n_j\}, \{\tilde{n}_j\}) = \frac{f_1(f_1 + 2)}{2} + \frac{\tilde{f}_1(\tilde{f}_1 + 2)}{2} + f_2 \tilde{f}_2 + f_1 f_2 + \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 + (f_1 + f_2)(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2). \quad (4.3.5)$$

In free-fermion systems, Wick theorem implies that all correlation functions can be given in terms of two-point functions. In turn, the reduced density matrix of a subsystem A , and hence entanglement measures, can be expressed in terms of the chopped correlation matrix \mathcal{C}_A which contains all two-point correlation functions within the subsystem [37]. For a bipartite subsystem $A = A_1 \cup A_2$, the chopped correlation matrix admits a block structure,

$$\mathcal{C}_A = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.3.6)$$

where the blocks \mathcal{C}_{ij} , of dimension $\ell_i \times \ell_j$, contain the correlations between the regions A_i and A_j . The entries of these blocks are the two-point correlation functions $C_{m,n}$ given in (4.2.10) (or equivalently (4.2.11) for the off-diagonal terms $m \neq n$), where the indices m and n are restricted to the sites in A_i and A_j , respectively. For simplicity, we introduce the covariance matrix $J_A = 2\mathcal{C}_A - \mathbb{I}$, which also has a block structure,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

The partial time-reversal operation modifies the covariance matrix. In particular, the matrices associated with $\rho_{A_1, A_2}^{R_1}$ and $(\rho_{A_1, A_2}^{R_1})^\dagger$, and denoted J_+ and J_- , respectively, are given by [48, 49]

$$J_\pm = \begin{pmatrix} -J_{11} & \pm i J_{12} \\ \pm i J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.3.8)$$

Finally, using manipulations of Gaussian operators [89, 90], one can show that the matrix J_x corresponding to the product $\rho_{A_1, A_2}^{R_1} (\rho_{A_1, A_2}^{R_1})^\dagger$ is

$$J_x = (\mathbb{I} + J_+ J_-)(J_+ + J_-). \quad (4.3.9)$$

The fermionic logarithmic negativity is then [48–51]

$$\mathcal{E}_f = \sum_{j=1}^{\ell_1 + \ell_2} \log \left[\left(\frac{1 + \nu_j^x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1 - \nu_j^x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell_1 + \ell_2} \log \left[\left(\frac{1 + \nu_j}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \nu_j}{2} \right)^2 \right], \quad (4.3.10)$$

where ν_j^x and ν_j are the eigenvalues of the matrices J_x and J_A , respectively.

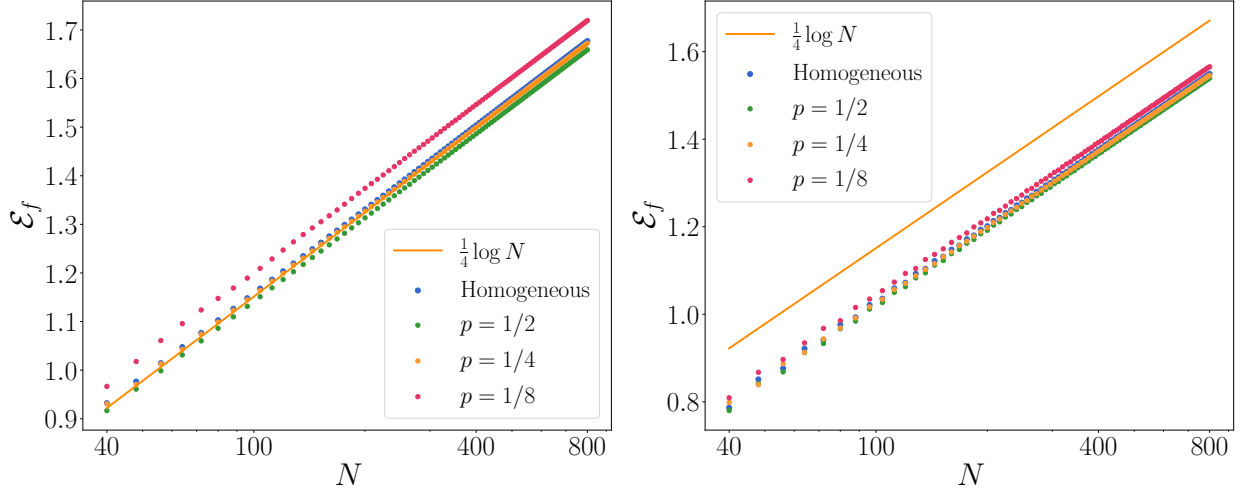


Fig. 4.2. Fermionic logarithmic negativity \mathcal{E}_f in log-scale for adjacent regions centered in the middle of the chain, of length $\ell_1 = \ell_2 = \frac{N+1}{4}$ (left) and $\ell_1 = 2\ell_2 = \frac{N+1}{4}$ (right). \mathcal{E}_f is plotted as a function of N for the homogeneous chain and the Krawtchouk chain for various values of p . The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.3.10), and the solid line is the curve $\frac{1}{4} \log N$, which serves as a guide to the eye. Clearly all curves are parallel, indicating the same leading term $\mathcal{E}_f \sim \frac{1}{4} \log N$.

4.4. Adjacent regions

We start our investigations with the case of adjacent regions. For simplicity, we impose that the regions are centered in the middle of the chain, namely their contact point is located at site $(N+1)/2$. This geometry corresponds to Fig. 4.1 with $d = 0$ and where the right end of system A_1 is in the center of the chain. We then consider two cases: (i) $\ell_1 = \ell_2 = \frac{N+1}{4}$ and (ii) $\ell_1 = 2\ell_2 = \frac{N+1}{4}$. In both cases, we study the scaling of the negativity as a function of the system size N for the Krawtchouk chain at half filling $\rho = 1/2$ with various values of p , as well as for the homogeneous free-fermion chain obtained by choosing $J_n = -\frac{1}{2}$ and $B_n = 0$ in the Hamiltonian (4.2.1). The diagonalization of the latter is standard, see, e.g., Ref. [32]. We report our numerical results in Fig. 4.2. In all cases, we find a scaling of the form

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{4} \log N + \text{cst}, \quad (4.4.1)$$

which corresponds to the CFT scaling of Eq. (4.1.4) with $c = 1$. This value of the central charge is consistent with previous results regarding bipartite entanglement in the Krawtchouk chain [11, 80], and it is a well-known fact for the homogeneous chain, see, e.g., Ref [2]. For the case (i), Eq. (4.1.4) further predicts a constant term of the form $-\frac{1}{4} \log 8 + b$, whereas for case (ii) it is $-\frac{1}{4} \log 12 + b$. In all cases we find $b \sim 0.5$. A refined curved-space CFT [75]

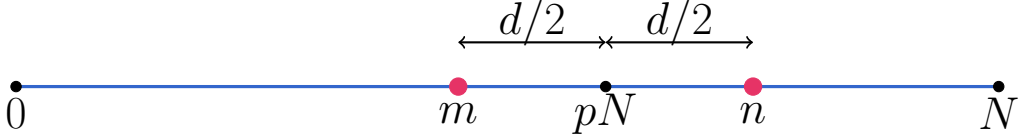


Fig. 4.3. Illustration of the geometry for the bulk negativity. The two sites m and n are separated by a distance d and centered around the position pN .

analysis of the Krawtchouk chain is needed to properly interpret the physical content of the constant and subleading terms, and we leave this for future investigations.

4.5. Disjoint regions

In this section, we investigate the decay of the fermionic logarithmic negativity as a function of the distance in the Krawtchouk chain. In this context, we consider the skeletal case [55] where both regions consist of a single site, $\ell_1 = \ell_2 = 1$. This skeletal regime faithfully captures the leading order of the scaling of the negativity. Indeed, at large distances the two systems become point-like compared to their separation [54]. This approach was notably used to characterize the decay of the negativity for Dirac fermions in arbitrary dimension [54] and for the Schwinger model [91].

For a state on which the fermion number operator is diagonal, the skeletal fermionic logarithmic negativity can be expressed in closed form as a function of the filling fraction ρ , the two-point correlation function $C_{m,n}$ and the density-density correlation $R_{m,n} = \langle \Psi | c_m^\dagger c_m c_n^\dagger c_n | \Psi \rangle$. For half-filling $\rho = 1/2$, it reads [54]

$$\mathcal{E}_f = \log \left(1 - 2R_{m,n} + 2\sqrt{C_{m,n}^2 + R_{m,n}^2} \right). \quad (4.5.1)$$

The generalization to arbitrary filling is straightforward. In the limit of large separation, we have $\lim_{|m-n| \rightarrow \infty} C_{m,n} = 0$ and $\lim_{|m-n| \rightarrow \infty} R_{m,n} = \rho^2$. We expand the logarithmic negativity for arbitrary ρ in this limit and find

$$\mathcal{E}_f = \frac{2}{1 + 2(\rho - 1)\rho} |C_{m,n}|^2 + \mathcal{O}(|C_{m,n}|^2 (R_{m,n} - \rho^2)). \quad (4.5.2)$$

For $\rho = 1/2$, we recover the leading term $\mathcal{E}_f = 4|C_{m,n}|^2$ [54].

4.5.1. Bulk negativity

We consider the skeletal negativity between single sites as a function of the separation d when the two sites are located well within the bulk of the chain. In particular, we choose to center them around the position pN , where $0 < p < 1$ is the parameter of the Krawtchouk chain (we exclude the extreme cases $p = 0$ and $p = 1$). This choice allows to perform

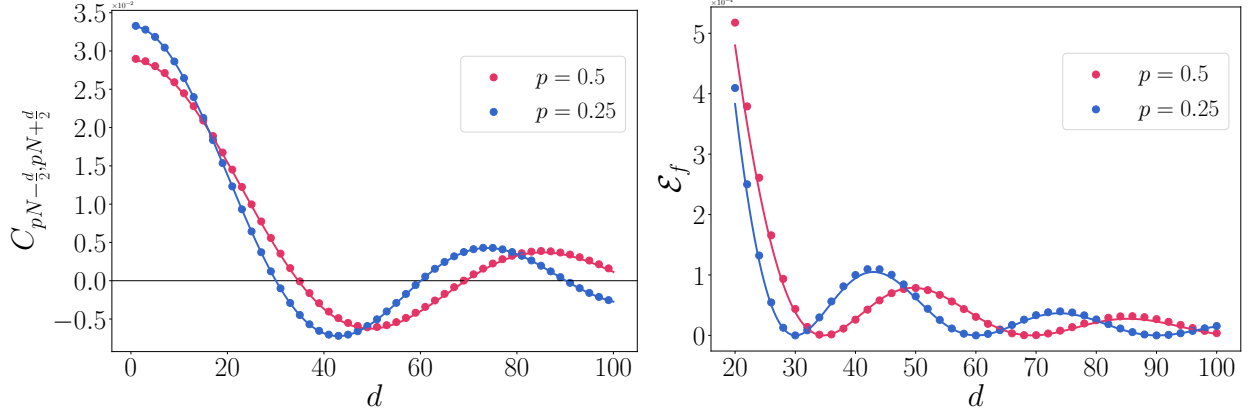


Fig. 4.4. Two-point correlation function (left) and fermionic logarithmic negativity (right) between two sites centered around pN as a function of the distance d with $N = 2 \times 10^4$ and small filling fraction $\rho = 2 \times 10^{-3}$ for various values of p . *Left:* The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.2.10). The solid lines represent the analytical prediction of Eq. (4.5.3) for small filling fraction ρ . *Right:* The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.3.10). The solid lines correspond to Eq. (4.5.2) where the two-point correlation function is given by Eq. (4.5.3). The matches are extremely convincing.

analytical calculations for the two-point correlation function and hence for the negativity, with Eq. (4.5.2). We depict this geometry in Fig. 4.3. In the following, we work in the limit of large system size $N \gg 1$ and large separation $d \gg 1$, with $d \ll N$.

First, we consider the case of small filling fraction $\rho \ll 1$. In this limit, we find

$$C_{pN-\frac{d}{2}, pN+\frac{d}{2}} = \frac{1}{\pi d} \sin \left(d \sqrt{\frac{\rho}{p(1-p)}} \right). \quad (4.5.3)$$

The proof of this result is provided in App. 4.7.1. In Fig. 4.4, we test this analytical prediction for the two-point correlation function, and the corresponding leading term for the logarithmic negativity obtained by combining Eqs. (4.5.2) and (4.5.3). We find an excellent match between the analytical prediction and the exact numerical calculations for both quantities.

For the interesting case of arbitrary filling fraction ρ , it is also possible to use known results regarding the asymptotics of Krawtchouk polynomials at $p = 1/2$, see Ref. [92], to extract the behaviour of the two-point correlation at large distance. We find

$$C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} = \frac{1}{\pi d} \sin (2d \arcsin(\sqrt{\rho})), \quad (4.5.4)$$

in the limit $N \rightarrow \infty$ with even N , and present the proof in App. 4.7.1.2.

Comparing Eqs. (4.5.3) and (4.5.4), we conjecture that the two-point correlation function scales as

$$C_{pN-\frac{d}{2}, pN+\frac{d}{2}} = \frac{1}{\pi d} \sin \left(d \sqrt{\frac{1}{p(1-p)}} \arcsin(\sqrt{\rho}) \right) \quad (4.5.5)$$

for arbitrary ρ and p in the regime $1 \ll d \ll N$. The proof of this conjecture for the general case is an open problem which is beyond the objectives of the present study. In Fig. 4.5, we compare the conjecture of Eq. (4.5.5) with numerical calculations and find an excellent agreement, both for the two-point function and the logarithmic negativity. In the numerical calculations, we take $N = 4000$ and choose a simple rational number for the filling fraction. We then take $K = \lceil \rho(N+1) - 1 \rceil$, which is equivalent to the definition of Eq. (4.2.9) in the large- N limit.

Disregarding the oscillatory terms, we thus find with Eqs. (4.5.2) and (4.5.5) that the bulk negativity in the Krawtchouk chain decays as d^{-2} :

$$\mathcal{E}_f \sim \frac{2}{(1 + 2(\rho - 1)\rho)\pi^2 d^2}. \quad (4.5.6)$$

This is exactly the same behaviour as in the homogeneous chain. Indeed, in the uniform model, the correlation function in the infinite open chain reads [67, 93]

$$C_{m,n}^{\text{hom}} = \frac{\sin(\pi\rho(m-n))}{\pi(m-n)} - \frac{\sin(\pi\rho(m+n))}{\pi(m+n)}. \quad (4.5.7)$$

Deep in the bulk, the second term in Eq. (4.5.7) vanishes, and from Eq. (4.5.2) we get $\mathcal{E}_f^{\text{hom}} \sim \frac{2}{(1+2(\rho-1)\rho)\pi^2 d^2}$, as in Eq. (4.5.6). As expected, this is also the same power-law decay as for Dirac fermions in one dimension [54].

4.5.2. Boundary negativity

Because the Krawtchouk chain is inhomogeneous, it is important to investigate the scaling of the negativity in different regions of the chain. We thus turn to the examination of boundary negativity, where we study the negativity between the first or second site of the chain and a site at distance d . We illustrate this geometry in Fig. 4.6. We still work in the regime $1 \ll d \ll N$. For the special case where $\rho = p$ in the large- N limit, we find

$$C_{0,d} = \frac{1}{(2\pi^3)^{\frac{1}{4}} d^{\frac{3}{4}}} \sin \left(\frac{-\pi d}{2} \right), \quad (4.5.8a)$$

$$C_{1,d+1} = \frac{1}{(2\pi^3)^{\frac{1}{4}} d^{\frac{5}{4}}} \sin \left(\frac{-\pi d}{2} \right). \quad (4.5.8b)$$

Choosing to set $\rho = p$ allows to derive these results analytically. The proof is provided in App. 4.7.2. We test these predictions against numerical evaluations of the correlation

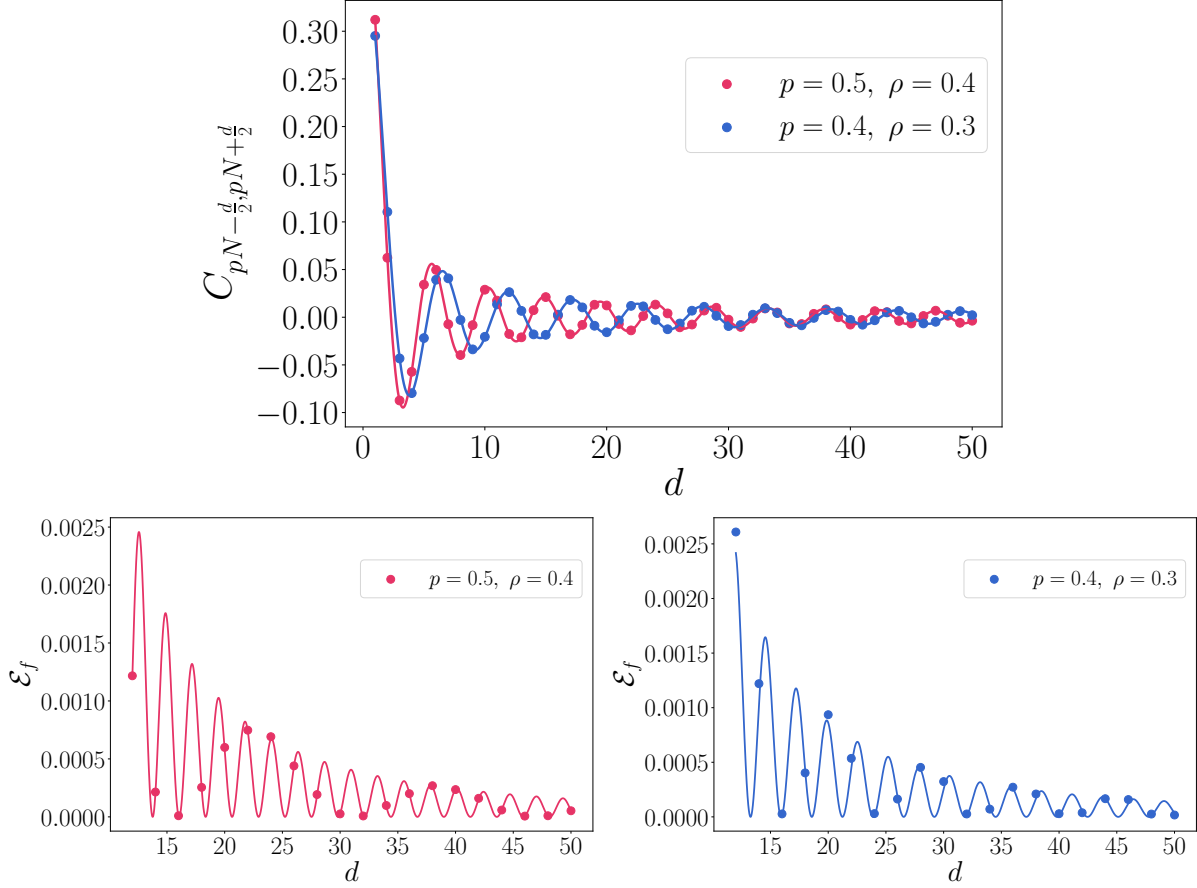


Fig. 4.5. Two-point correlation function (top) and fermionic logarithmic negativity (bottom) between two sites centered around pN as a function of the distance d with $N = 4000$ for various values of ρ and p . *Top:* The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.2.10). The solid lines represent the conjecture of Eq. (4.5.5) (or equivalently Eq. (4.5.4) for $\rho = 1/2$). *Bottom:* The symbols are obtained by numerical evaluation of Eq. (4.3.10). The solid lines correspond to Eq. (4.5.2) where the two-point correlation function is given by Eq. (4.5.5).



Fig. 4.6. Illustration of the geometry for the boundary negativity. The two sites m and n are separated by a distance d , and $m = 0$ is at the left end of the chain. We also consider the case $m = 1$, but the figure is very similar.

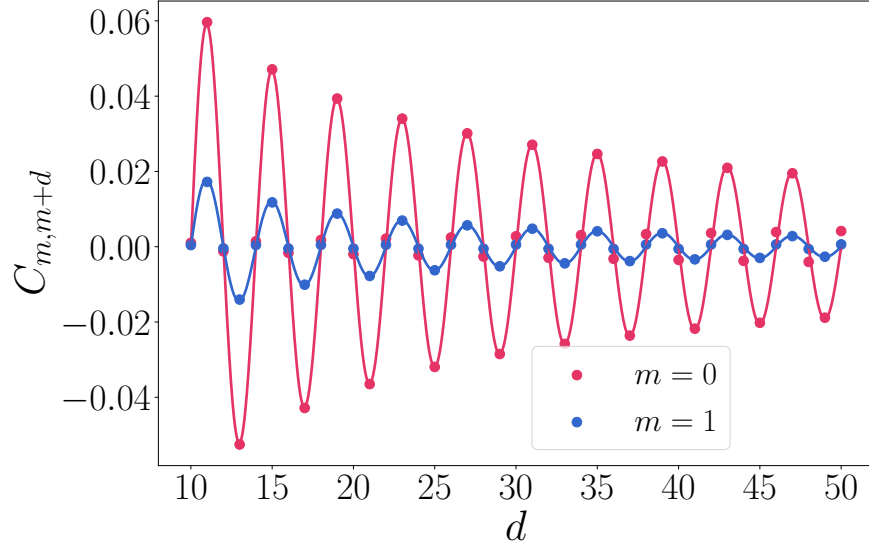


Fig. 4.7. Boundary correlation $C_{m,m+d}$ with $m = 0,1$ for $N = 10^6$ and $\rho = p = 0.15$. The symbols are obtained by numerical evaluation of the correlation functions, and the solid lines are the analytical predictions of Eq. (4.5.8). We find an excellent agreement.

functions in Fig. 4.7. We note that, in order to find a good match between the numerics and the analytical predictions, we need to go to very large system size, i.e., of order $N \sim 10^6$.

Based on Eqs. (4.5.8), we thus see that the boundary negativity decays as $d^{-4\Delta_f}$, with $\Delta_f = 3/8$ and $\Delta_f = 5/8$ when the left site is at $m = 0$ and $m = 1$, respectively. We verified this numerically in Fig. 4.8. This is surprising for several reasons. First, the power-law decay is different from the bulk result $\Delta_f = 1/2$. Second, one can easily check that the boundary negativity in the open homogeneous chain also decays with exponent $\Delta_f = 1/2$. This indicates that, contrarily to what happens in the bulk, the Krawtchouk chain displays different physical behaviour close to the boundary compared to the homogeneous chain. Finally, the fact that the exponent depends on the position of the left site m is rather puzzling. We investigated different boundary correlations $C_{m,m+d}$ for small m , and observed a parity effect: for even m we have $\Delta_f^{\text{even}} = 3/8$, whereas for odd m we have $\Delta_f^{\text{odd}} = 5/8$. The coefficients however are no longer given by Eq. (4.5.8) for $m > 1$, and an analytical derivation for arbitrary m remains to be found. We illustrate this parity effect for the logarithmic negativity in Fig. 4.8 with $m = 0,1,2,3$.

4.6. Conclusion

In this paper, we have initiated the study of the fermionic logarithmic negativity in inhomogeneous free-fermion models. We focused on a one-dimensional model whose diagonalization relies on Krawtchouk polynomials, that are at the bottom of the discrete part of

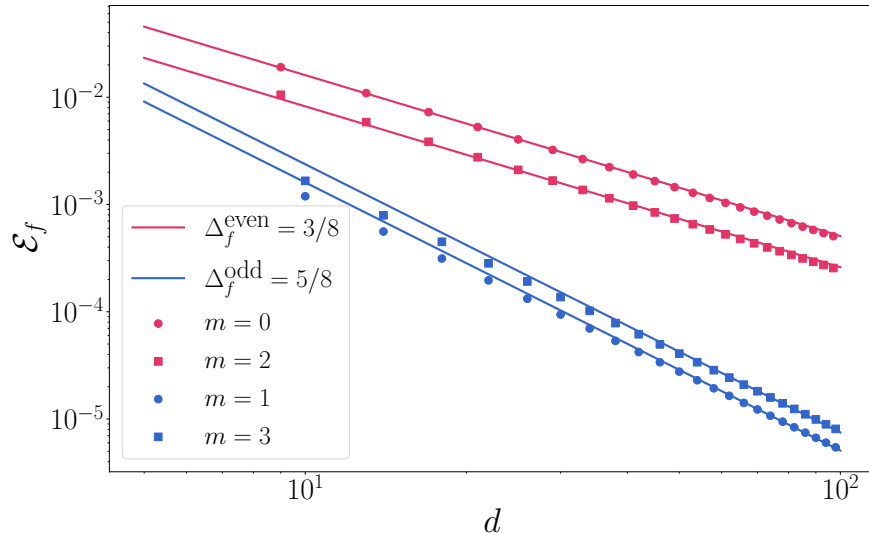


Fig. 4.8. Boundary logarithmic negativity between sites m and $m + d$ as a function of d in log-log scale, for $m = 0, 1, 2, 3$ with $N = 1000$ and $\rho = p = 1/2$. The symbols are numerical calculations of the negativity, and the solid lines are either obtained from Eq. (4.5.8) for $m = 0, 1$ or numerical fit for $m = 2, 3$. The slope of the curves depends on the parity of m , and we have $\mathcal{E}_f \propto d^{-4\Delta_f}$ with $\Delta_f^{\text{even}} = 3/8$ and $\Delta_f^{\text{odd}} = 5/8$.

the Askey scheme for $q = 1$. Previous studies on the entanglement entropy in this model have shown that it is described by a CFT with central charge $c = 1$ in the scaling limit. We confirmed this by showing that the logarithmic negativity of adjacent intervals scales as $\mathcal{E}_f \sim \frac{c}{4} \log(\ell_1 \ell_2 / (\ell_1 + \ell_2))$ with $c = 1$, for different choices of the ratio ℓ_1 / ℓ_2 .

We also examined the decay of the logarithmic negativity for disjoint systems as a function of their lattice separation d . We concentrated our attention on the skeletal regime $\ell_1 = \ell_2 = 1$, as it is known to be sufficient to extract the leading behaviour, and considered bulk and boundary negativities. In the bulk, the fermionic logarithmic negativity was found to decay as $\mathcal{E}_f \propto d^{-4\Delta_f}$ with $\Delta_f = 1/2$. We were able to prove this result for (i) arbitrary p and small filling fraction $\rho \ll 1$, and (ii) arbitrary ρ and $p = 1/2$. Combining these two results, we offered with Eq. (4.5.5) a conjecture for generic p and ρ regarding the expression of the correlation function, and hence the skeletal logarithmic negativity. The exponent $\Delta_f = 1/2$ corresponds to free Dirac fermions in one dimension, and agrees with previous results for the homogeneous free-fermion model. These results indicate that the inhomogeneities of the Krawtchouk chain do not play a significant role in the bulk, and that the entanglement properties of the model are identical to those of homogeneous free-fermions far from the boundaries. Close to the boundaries however, the story is different. We found that the negativity between sites m and $m + d$ for small m (i.e., close to the left boundary) decays

as $\mathcal{E}_f \propto d^{-4\Delta_f}$ with an exponent that depends on the parity of m . For even m we have $\Delta_f^{\text{even}} = 3/8$, whereas for odd m it is $\Delta_f^{\text{odd}} = 5/8$. We were able to prove this behaviour for $m = 0, 1$, and provided numerical evidences for $m = 2, 3$.

This work opens several natural research avenues. First, it would be important to explore the behaviour of the negativity in other free-fermion chains of the Askey scheme, such as the dual Hahn and Racah chains [32]. In particular, one should investigate the boundary negativity, and determine whether the parity effect observed in the Krawtchouk chain reflects at a more general property of these models. Second, it is worth noting that the behaviour of the boundary correlations represents a rare instance where a physical property of the Krawtchouk chain strongly differs from its homogeneous counterpart (see also [94]). It is thus an intriguing open question to understand the physical reason behind the peculiar behaviour of the boundary correlations observed here. Finally, the problem of the negativity in inhomogeneous setting should be explored in different contexts, such as nonequilibrium situations and curved-space CFTs [75]. This would undoubtedly enhance our understanding of the role inhomogeneities play in realistic condensed-matter and cold-atomic systems.

Acknowledgements

GP held FRQNT and CRM-ISM postdoctoral fellowships, and received support from the Mathematical Physics Laboratory of the CRM while this work was carried out. The research of LV is funded in part by a Discovery Grant from the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) of Canada. We thank Clément Berthiere for valuable comments on the draft.

4.7. Appendix : Asymptotics for the correlation functions

In this appendix, we compute various asymptotic expansions for correlation functions of the Krawtchouk chain. We shall use the following asymptotic limit relating Krawtchouk and Hermite polynomials [35],

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\binom{N}{k}} K_k(pN + x\sqrt{2p(1-p)N}, p, N) = \frac{(-1)^k H_k(x)}{\sqrt{2^k k! \left(\frac{p}{1-p}\right)^k}}, \quad (4.7.1)$$

where $H_k(x)$ is the Hermite polynomial of order k evaluated in x . In this relation, k is a constant.

4.7.1. Bulk correlation functions

4.7.1.1. Bulk correlation function for small filling fraction $\rho \ll 1$. We compute below the correlation function corresponding to two sites centered around pN (in the bulk of the chain) and separated by a distance d , as illustrated in Fig. 4.3. Moreover, we consider the limit of small filling fraction, $\rho \ll 1$, and large system size, $N \rightarrow \infty$. We combine the exact form (4.2.10) for the correlation function, the asymptotic formula (4.7.1) and the Christoffel-Darboux formula for Hermite polynomials, and find

$$C_{pN-\frac{d}{2}, pN+\frac{d}{2}} = F\left(pN - \frac{d}{2}, pN + \frac{d}{2}\right) \frac{1}{K!2^{K+1}} \frac{H_K(-x)H_{K+1}(x) - H_K(x)H_{K+1}(-x)}{2x} \quad (4.7.2)$$

where $x = -\frac{d}{\sqrt{8\rho(1-p)N}}$ and

$$F(m, n) = (-1)^{m+n} \left(p^{m+n} (1-p)^{2N-m-n} \binom{N}{m} \binom{N}{n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7.3)$$

Note that we used the asymptotic relation of Eq. (4.7.1) with $k \sim K$, and that $K \sim \rho N$ is divergent in the large- N limit, while Eq. (4.7.1) is valid for constant k . To circumvent this issue, we assume in the following that the filling fraction is very small, $\rho \ll 1$.

In the limit of large k , we have

$$e^{-x^2/2} H_k(x) \sim \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{k\pi}{2}\right), \quad (4.7.4)$$

and hence

$$C_{pN-\frac{d}{2}, pN+\frac{d}{2}} \sim F\left(pN - \frac{d}{2}, pN + \frac{d}{2}\right) \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}2x} \left(\cos\left(x\sqrt{2K} + \frac{K\pi}{2}\right) \cos\left(x\sqrt{2K+2} - \frac{(K+1)\pi}{2}\right) - \cos\left(x\sqrt{2K+2} + \frac{(K+1)\pi}{2}\right) \cos\left(x\sqrt{2K} - \frac{K\pi}{2}\right) \right). \quad (4.7.5)$$

To proceed, we use Stirling's approximation to extract the asymptotic behaviour of the function $F(m, n)$. We find

$$F\left(pN - \frac{d}{2}, pN + \frac{d}{2}\right) \sim \left(\frac{1}{2\pi p(1-p)N} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}. \quad (4.7.6)$$

We combine this result with Eq. (4.7.5), and after some straightforward trigonometric calculations, we arrive at

$$C_{pN-\frac{d}{2}, pN+\frac{d}{2}} = \frac{1}{\pi d} \sin\left(d\sqrt{\frac{\rho}{p(1-p)}}\right) \quad (4.7.7)$$

in the limit $N \rightarrow \infty$, which is Eq. (4.5.3).

4.7.1.2. Bulk correlation function for $p = \frac{1}{2}$. The correlation function of two sites separated by a distance d and centered around the middle of the chain with $p = 1/2$ reads

$$C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} = (-1)^N 2^{-(N+1)} \sqrt{\binom{N}{\frac{N-d}{2}} \binom{N}{\frac{N+d}{2}} \binom{N}{K}} (N-K) \frac{K_K \left(\frac{N+d}{2}, \frac{1}{2}, N\right) K_{K+1} \left(\frac{N-d}{2}, \frac{1}{2}, N\right) - K_K \left(\frac{N-d}{2}, \frac{1}{2}, N\right) K_{K+1} \left(\frac{N+d}{2}, \frac{1}{2}, N\right)}{d}, \quad (4.7.8)$$

where we impose that $(N+d)$ is an even number. The identity

$$K_n \left(N - x, \frac{1}{2}, N\right) = (-1)^n K_n \left(x, \frac{1}{2}, N\right) \quad (4.7.9)$$

allows to recast the correlation function as

$$C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} = (-1)^{N+K} 2^{-N} \sqrt{\binom{N}{\frac{N-d}{2}} \binom{N}{\frac{N+d}{2}} \binom{N}{K}} (N-K) \frac{K_K \left(\frac{N-d}{2}, \frac{1}{2}, N\right) K_{K+1} \left(\frac{N-d}{2}, \frac{1}{2}, N\right)}{d}. \quad (4.7.10)$$

Our goal is to compute the asymptotic behaviour of this correlation function when $N \rightarrow \infty$. In Ref. [92], an asymptotic expansion of the Krawtchouk polynomials $P_n(nt, \frac{1}{2}, N) \equiv \left(\frac{-1}{2}\right)^n \binom{N}{n} K_n(nt, \frac{1}{2}, N)$ is derived for the special case where the ratio N/n is constant as $n \rightarrow \infty$ and $N \rightarrow \infty$. In terms of the polynomials $P_n(nt, \frac{1}{2}, N)$, the correlation function reads

$$C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} = (-1)^{N+K+1} 2^{-N+2K+1} (N-K) \frac{\sqrt{\binom{N}{\frac{N-d}{2}} \binom{N}{\frac{N+d}{2}}}}{\binom{N}{K+1}} \frac{P_K \left(t_1 K, \frac{1}{2}, N\right) P_{K+1} \left(t_2 (K+1), \frac{1}{2}, N\right)}{d} \quad (4.7.11)$$

where we introduced $t_1 = \frac{N-d}{2K}$ and $t_2 = \frac{N-d}{2(K+1)}$. The asymptotic expansion of the Krawtchouk polynomials is¹ [92]

$$P_n \left(nt, \frac{1}{2}, N\right) = (-1)^{\frac{N+d}{2}+K+1} \frac{1}{2^{n-1}\pi} e^{-n\Re\{p(t)\}} \sin(n\alpha(t) - \alpha_1(t)) \left| \frac{\sqrt{\pi} n^{-\frac{1}{2}}}{z_1(t) (2p''(t))^{\frac{1}{2}}} \right|, \quad (4.7.12)$$

where the function $p(t)$ is defined as

$$p(t) = \log(z_1(t)) - t \log(1 + z_1(t)) - (\gamma - t) \log(1 - z_1(t)), \quad (4.7.13)$$

¹We added a factor $2 \times (-1)^{\frac{N+d}{2}+K+1}$ compared to Eq. (3.8) of [92].

with

$$z_1(t) = \frac{-\Delta(t) + \sqrt{D(t)}}{2(\gamma - 1)}, \quad (4.7.14)$$

$$\Delta(t) = \gamma - 2t, \quad (4.7.15)$$

$$D(t) = \Delta(t)^2 - 4(\gamma - 1) \quad (4.7.16)$$

$$\gamma = \frac{N}{n}. \quad (4.7.17)$$

Moreover, we have

$$p''(t) = \frac{2(\gamma - 1)z_1(t) + \Delta(t)}{z_1(t)(1 - z_1(t)^2)}. \quad (4.7.18)$$

Looking at Eq. (4.7.11), we see that the two relevant γ 's for this problem are $\gamma_1 = \frac{N}{\rho(N+1)-1}$ and $\gamma_2 = \frac{N}{\rho(N+1)}$, where we recall $K = \rho(N+1) - 1$. They are both constant in the large- N limit, as required. The remaining functions that need to be defined are

$$\alpha(t) = t \cot^{-1} \left(\frac{2(\gamma - 1) - \Delta(t)}{\sqrt{-D(t)}} \right) + (\gamma - t) \left(\cot^{-1} \left(\frac{2(\gamma - 1) + \Delta(t)}{-\sqrt{-D(t)}} \right) - \pi \right) - \cot^{-1} \left(\frac{-\Delta(t)}{\sqrt{-D(t)}} \right), \quad (4.7.19)$$

and

$$\alpha_1(t) = \arg \left\{ z_1(t) p''(t)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.7.20)$$

With these expressions in hand, the correlation function can be recast as

$$\begin{aligned} C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} &= \frac{(-1)^{N+K} 2^{-N+2} (N-K) \sqrt{\binom{N}{\frac{N-d}{2}} \binom{N}{\frac{N+d}{2}}}}{d\pi \binom{N}{K+1}} e^{-K\Re\{p(t_1)\} - (K+1)\Re\{p(t_2)\}} \\ &\times \sin(K\alpha(t_1) - \alpha_1(t_1)) \sin((K+1)\alpha(t_2) - \alpha_1(t_2)) \left| \frac{K^{-\frac{1}{2}}}{z_1(t_1)(2p''(t_1))^{\frac{1}{2}}} \right| \left| \frac{(K+1)^{-\frac{1}{2}}}{z_1(t_2)(2p''(t_2))^{\frac{1}{2}}} \right|. \end{aligned} \quad (4.7.21)$$

Now, let us first examine the product of the two sines in Eq. (4.7.21). In terms of the variables d , ρ and N , after a few simplifications, this product reads

$$\begin{aligned} \sin(K\alpha(t_1) - \alpha_1(t_1)) \sin((K+1)\alpha(t_2) - \alpha_1(t_2)) &= \cos \left[\frac{1}{2} (\pi + d\pi + N\pi - 2\rho\varphi_1 + d(\varphi_2 + \varphi_3)) \right. \\ &+ \frac{N}{2} (\varphi_3 - \varphi_2 - 2\rho\varphi_1) + \arg \left\{ (i\zeta_1 - d) \left(\frac{i\zeta_1(N(1-\rho) + \rho)}{(d - i\zeta_1)(d^2 + 2N(N(\rho-1) + \rho) - id\zeta_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \left. \right] \\ &\times \cos \left[\frac{1}{2} (\pi + d\pi + N\pi + 2(1-\rho)\varphi_4 + N(\varphi_5 + \varphi_6 - 2\rho\varphi_4) + d(\varphi_5 - \varphi_6)) \right. \\ &\left. + \arg \left\{ (i\zeta_2 - d) \left(\frac{i\zeta_2}{(d - i\zeta_2)(d^2 + 2N(N+1)(\rho-1) - id\zeta_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \quad (4.7.22) \end{aligned}$$

where

$$\zeta_1 = \sqrt{-d^2 - 4(N+1)\rho(N(\rho-1) + \rho)}, \quad \zeta_2 = \sqrt{-d^2 - 4(N+1)(\rho-1)(\rho-1 + N\rho)},$$

and

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cot^{-1} \left(\frac{d}{\zeta_1} \right), & \varphi_2 &= \cot^{-1} \left(\frac{-d - 2(N(\rho-1) + \rho)}{\zeta_1} \right), \\ \varphi_3 &= \cot^{-1} \left(\frac{d - 2(N(\rho-1) + \rho)}{\zeta_1} \right), & \varphi_4 &= \cot^{-1} \left(\frac{d}{\zeta_2} \right), \\ \varphi_5 &= \cot^{-1} \left(\frac{d - 2(N+1)(\rho-1)}{\zeta_2} \right), & \varphi_6 &= \cot^{-1} \left(\frac{d + 2(N+1)(\rho-1)}{\zeta_2} \right). \end{aligned}$$

The series expansions of the terms in the cosines in Eq. (4.7.22) are

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.7.23)$$

$$\varphi_3 - \varphi_2 - 2\rho\varphi_1 = -\rho\pi + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (4.7.24)$$

$$\varphi_2 + \varphi_3 = 2 \arcsin(\sqrt{\rho}) + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.7.25)$$

and

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.7.26)$$

$$\varphi_5 + \varphi_6 - 2\rho\varphi_4 = -\rho\pi + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (4.7.27)$$

$$\varphi_5 - \varphi_6 = 2 \arcsin(\sqrt{\rho}) + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.7.28)$$

Moreover, the arg functions in both cosines go to $\pi/2$. Putting this all together gives

$$\sin(K\alpha(t_1) - \alpha_1(t_1)) \sin((K+1)\alpha(t_2) - \alpha_1(t_2)) \sim \frac{1}{2} (-1)^{(N+1)\rho+1} \sin(2d \arcsin(\sqrt{\rho})). \quad (4.7.29)$$

The second step is to find the behaviour of the binomial terms in Eq. (4.7.21) as $N \rightarrow \infty$. The asymptotic expansion reads

$$\frac{\sqrt{\binom{N}{\frac{N-d}{2}} \binom{N}{\frac{N+d}{2}}}}{\binom{N}{K+1}} \sim \exp\left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{12N\rho(1-\rho)}\right) \frac{2^N(6N-3d^2-2)}{3N} (\rho^{-1}-1)^{-(N+1)\rho} (1-\rho)^N \sqrt{(1-\rho)\rho}. \quad (4.7.30)$$

Turn then to the exponential term in Eq. (4.7.21). After some algebra, it can be recast as

$$\begin{aligned} \exp(-K\Re\{p(t_1)\} - (K+1)\Re\{p(t_2)\}) = \\ \left| \left(\frac{d - i\zeta_1}{2(N(\rho-1) + \rho)} \right)^{-(N+1)\rho} \left(\frac{d - 2N + 2\rho + 2N\rho - i\zeta_1}{2(N(\rho-1) + \rho)} \right)^{\frac{N-d}{2}} \right. \\ \left. \left(\frac{-d - 2N + 2\rho + 2N\rho + i\zeta_1}{2(N(\rho-1) + \rho)} \right)^{\frac{N+d}{2}} \left(\frac{d - i\zeta_2}{2(N+1)(\rho-1)} \right)^{1-(N+1)\rho} \right. \\ \left. \left(-\frac{d - 2(N+1)(\rho-1) - i\zeta_2}{2(N+1)(\rho-1)} \right)^{\frac{N+d}{2}} \left(-\frac{-d - 2(N+1)(\rho-1) + i\zeta_2}{2(N+1)(\rho-1)} \right)^{\frac{N-d}{2}} \right|, \quad (4.7.31) \end{aligned}$$

and the asymptotic expansion of this expression is

$$\begin{aligned} \exp(-K\Re\{p(t_1)\} - (K+1)\Re\{p(t_2)\}) \sim \\ \exp\left(\frac{2 + 2d^2 + \frac{1}{(\rho-1)\rho}}{4N}\right) (1-\rho)^{-\frac{1}{2} + N(\rho-1) + \rho} \rho^{\frac{1}{2} - (N+1)\rho}. \quad (4.7.32) \end{aligned}$$

Finally, the asymptotic expansion of the remaining terms in Eq. (4.7.21) is

$$\left| \frac{(K+1)^{-\frac{1}{2}}}{z_1(t_2)(2p''(t_2))^{\frac{1}{2}}} \right| \left| \frac{K^{-\frac{1}{2}}}{z_1(t_1)(2p''(t_1))^{\frac{1}{2}}} \right| \sim \frac{1}{8} \sqrt{\frac{-d^2(1-2\rho)^2(\rho-1)\rho + (1-2(N-2)(\rho-1)\rho)^2}{N^4(\rho-1)^4\rho^4}}. \quad (4.7.33)$$

Assembling Eqs. (4.7.21), (4.7.29), (4.7.30), (4.7.32) and (4.7.33) gives

$$\begin{aligned} C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} \sim (-1)^{N+1} \exp\left(\frac{1}{N} + \frac{d^2}{2N} + \frac{1}{6N\rho(\rho-1)}\right) (N+1)(6N-2-3d^2) \\ \times \frac{\sqrt{-d^2(1-2\rho)^2(\rho-1)\rho + (1-2(N-2)(\rho-1)\rho)^2}}{12dN^3\pi(\rho-1)\rho} \sin(2d \arcsin(\sqrt{\rho})). \quad (4.7.34) \end{aligned}$$

A final series expansion for $N \rightarrow \infty$ with even N yields

$$C_{\frac{N-d}{2}, \frac{N+d}{2}} = \frac{1}{\pi d} \sin(2d \arcsin(\sqrt{\rho})), \quad (4.7.35)$$

which is Eq. (4.5.4). The same limit for odd N flips the sign in Eq. (4.7.35), but this does not affect the behaviour of the logarithmic negativity. Therefore, we focus on even N for simplicity.

4.7.2. Boundary correlation functions

Here, we compute the correlation function between the left boundary ($n = 0$) of the chain, and a site at distance d , as illustrated in Fig. 4.6. The Krawtchouk polynomials evaluated at $n = 0$ is $K_k(0, p, N) = 1$, and therefore the correlation function in Eq. (4.2.11) reads

$$C_{0,d} = (-1)^d \left(\frac{p}{1-p}\right)^{d/2} (1-p)^N \sqrt{\binom{N}{d}} \sum_{k=0}^K \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \binom{N}{k} K_d(k, p, N), \quad (4.7.36)$$

where we used the symmetry of the Krawtchouk polynomials $K_k(d, p, N) = K_d(k, p, N)$. To proceed, we use Rodrigues' formula for Krawtchouk polynomials [35],

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^k \binom{N}{k} K_d(k, p, N) = \nabla^d \left(\binom{N-d}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \right), \quad (4.7.37)$$

where $\nabla f(k) \equiv f(k+1) - f(k)$ is the discrete derivative. With its help, Eq. (4.7.36) becomes a telescopic sum. We use Eq. (4.7.37) a second time to recast the result in terms of Krawtchouk polynomials. We find, up to a negligible term,

$$C_{0,d} = (-1)^d \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{d}{2}+K} (1-p)^N \sqrt{\binom{N}{d}} \binom{N-1}{K} K_{d-1}(K, p, N-1). \quad (4.7.38)$$

For simplicity, we now impose $K = p(N-1)$, which corresponds to $\rho \sim p$ in the large- N limit. With this choice of K , we use the asymptotic relation of Eq. (4.7.1) with $x = 0$. Given that the Hermite polynomials evaluated in $x = 0$ satisfy $H_{d-1}(0) = 2^{d-1} \sqrt{\pi} \Gamma(1-d/2)^{-1}$, we find

$$C_{0,d} = (-1) \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2}+K} (1-p)^N \sqrt{\frac{\binom{N}{d}}{\binom{N-1}{d-1}}} \binom{N-1}{p(N-1)} \left(\frac{2^{d-1}\pi}{(d-1)!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}. \quad (4.7.39)$$

Using Stirling's approximation for the binomial coefficients, we further simplify $C_{0,d}$ to

$$C_{0,d} = (-1) \frac{1}{(2d)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2^{d-1}}{(d-1)!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}. \quad (4.7.40)$$

In the limit of large d , the leading order is

$$C_{0,d} = (-1) \frac{1}{(2\pi^3)^{\frac{1}{4}} d^{\frac{3}{4}}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right), \quad (4.7.41)$$

where the sine function arises because the Gamma function has poles for negative integers. This result is precisely Eq. (4.5.8a).

The calculation for $C_{1,d+1}$ follows a similar reasoning. One has $K_1(k,p,N) = 1 - \frac{k}{pN}$. The sum in Eq. (4.2.11) thus becomes a double sum, both of which can be reduced to single Krawtchouk polynomials using Rodrigues' formula. Alternatively, one can directly start from the expression of Eq. (4.2.11) with $(m,n) = (1,d+1)$. Both approaches yield the same results, even though it is not manifest at first sight. To show the equivalence between the two results, it is useful to be reminded of the identity [95]

$$K_k(x-1, N-1, p) = \frac{pN}{x} (K_k(x, N, p) - K_{k+1}(x, N, p)). \quad (4.7.42)$$

The asymptotic calculations are then similar to those for $C_{0,d}$ outlined above, but are more cumbersome.

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons investigué l'intrication dans la chaîne de Krawtchouk à l'aide de la négativité logarithmique. Dans le premier chapitre, nous avons posé les bases quant aux caractéristiques définissantes de l'intrication, de la séparabilité d'états et nous avons introduit quelques mesures d'intrication. Le second chapitre offrait une brève description d'une chaîne de spin, avant de définir de manière plus rigoureuse le système à l'étude, soit le modèle XX. Nous avons à la fois décrit le cas particulier où les couplages entre les sites sont homogènes, ainsi que le cas inhomogène en explicitant l'exemple de la chaîne de Krawtchouk. Dans le Chapitre 3, nous avons décrit comment calculer la négativité logarithmique dans un système de fermions libre. Nous avons également fait la distinction entre la négativité fermionique et bosonique, puis nous avons recensé quelques prédictions données par la CFT.

Le quatrième chapitre consistait en l'article qui fait état des résultats obtenus au cours de ce projet de recherche. En premier lieu, nous avons étudié la négativité logarithmique pour deux régions adjacentes et nous avons confirmé que la chaîne de Krawtchouk est décrite par une CFT ayant une charge centrale de $c = 1$. Nous avons par la suite investigué le cas de deux régions disjointes. Nous nous sommes cependant limités à des régions squelettiques, ce qui nous permettait d'effectuer des calculs analytiques tout en capturant l'essentiel du comportement de la négativité logarithmique. En ce sens, nous avons commencé par offrir une expression du comportement du terme dominant de la négativité logarithmique pour de grandes séparations en termes de la fonction de corrélation à deux points, et ce, pour toute fraction de remplissage. Ceci nous a permis d'orienter notre recherche vers le comportement de la fonction de corrélation à deux points pour des chaînes de taille $N \rightarrow \infty$.

À cet effet, nous avons étudié deux cas, un premier où les deux sites de A_1 et A_2 se trouvaient dans le volume de la chaîne, et un autre où ces derniers étaient près d'un bord de la chaîne. Dans le premier cas, nous avons trouvé des expressions pour la fonction de corrélation pour tout p et à $\rho \ll 1$, ainsi que pour $p = 1/2$ et pour toute fraction de

remplissage. En combinant les deux équations, nous avons proposé une conjecture plus générale pour le comportement de la négativité logarithmique dans le volume, en l'appuyant avec des résultats numériques. Pour ce cas, nous avons trouvé que la dimension d'échelle est $\Delta_f = 1/2$, ce qui concorde avec celle du modèle homogène pour des fermions de Dirac.

En ce qui concerne le cas de sites en bordure de la chaîne, nous avons trouvé les expressions des fonctions de corrélation à deux points pour des sites se trouvant à une distance m et $m + d$ du bord de la chaîne. Nous avons trouvé que les dimensions d'échelle associées à des m pairs est $\Delta_f^{pair} = 3/8$ et est $\Delta_f^{impair} = 5/8$ pour des m impairs. Nous avons été en mesure de prouver ce comportement pour $m = 0,1$ et nous avons obtenu des résultats numériques concordant pour $m = 2,3$.

Cet ouvrage ouvre la voie à certaines réflexions et avenues de recherche. Par exemple, cette grande disparité entre le cas homogène et la chaîne de Krawtchouk en ce qui concerne la négativité logarithmique près du bord de la chaîne soulève plusieurs questions. Il serait pertinent d'étudier les raisons du changement de dimension d'échelle selon la parité de m et d'en comprendre le sens physique. Serait-ce le propre de la chaîne étudiée, ou il en est d'une propriété plus universelle des systèmes inhomogènes ? Plusieurs autres chaînes inhomogènes dont l'Hamiltonien est diagonalisé par des polynômes orthogonaux du schéma d'Askey gagneraient donc à être étudiées sous le même angle. Ces pistes permettraient d'améliorer la compréhension des effets de l'inhomogénéité dans les systèmes à plusieurs corps.

Références

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Phys. Rev.* **47** (May, 1935) 777–780.
- [2] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev, “Entanglement in quantum critical phenomena,” *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 227902.
- [3] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, and R. Fazio, “Scaling of entanglement close to a quantum phase transitions,” *Nature* **416** (2002) 608.
- [4] T. J. Osborne and M. A. Nielsen, “Entanglement in a simple quantum phase transition,” *Phys. Rev. A* **66** (2002) 032110.
- [5] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, “Entanglement in many-body systems,” *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 517.
- [6] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895–1899.
- [7] F. Pan, N. Ma, X. Guan, and J. P. Draayer, “First order quantum phase transitions in the xx spin chain,” 2007. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0701028>.
- [8] R. Radgohar and A. Montakhab, “Global entanglement and quantum phase transitions in the transverse xy heisenberg chain,” *Phys. Rev. B* **97** no. 2, (2018) .
- [9] C. Albanese, M. Christandl, N. Datta, and A. Ekert, “Mirror inversion of quantum states in linear registers,” *Physical Review Letters* **93** no. 23, (Nov., 2004) .
- [10] L. Vinet and A. Zhedanov, “How to construct spin chains with perfect state transfer,” *Physical Review A* **85** no. 1, (Jan., 2012) .
- [11] P.-A. Bernard, N. Crampé, R. I. Nepomechie, G. Perez, L. P. d’Andecy, and L. Vinet, “Entanglement of inhomogeneous free fermions on hyperplane lattices,” *Nucl. Phys. B* **984** (2022) 115975.
- [12] A. Ekert and P. L. Knight, “Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition,” *Am. J. Phys.* **63** (1995) 415–423.
- [13] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *The space of density matrices*, p. 209–232. Cambridge University Press, 2006.
- [14] A. Peres, “Separability criterion for density matrices,” *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1413–1415.
- [15] E. Chitambar, D. Leung, L. Mančinska, M. Ozols, and A. Winter, “Everything you always wanted to know about locc (but were afraid to ask),” *Commun. Math. Phys.* **328** no. 1, (2014) 303–326.
- [16] M. B. Plenio and S. Virmani, “An introduction to entanglement measures,” 2006. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0504163>.

- [17] M. Ma, Y. Li, and J. Shang, “Multipartite entanglement measures: a review,” 2023. <https://arxiv.org/abs/2309.09459>.
- [18] J. von Neumann and R. T. Beyer, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton University Press, ned - new edition ed., 2018.
- [19] H. Araki and E. H. Lieb, “Entropy inequalities,” *Commun. Math. Phys.* **18** (1970) .
- [20] A. Rényi, “On measures of entropy and information,” in *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics*, vol. 4, pp. 547–562, University of California Press. 1961.
- [21] M. Müller-Lennert, F. Dupuis, O. Szehr, S. Fehr, and M. Tomamichel, “On quantum Rényi entropies: A new generalization and some properties,” *J. Math. Phys.* **54** (2013) 122203.
- [22] N. Linden, M. Mosonyi, and A. Winter, “The structure of rényi entropic inequalities,” *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* **469** (2013) 20120737.
- [23] S. Gharibian, “Strong np-hardness of the quantum separability problem,” *Quantum Inf. Comput.* **10** (2010) 343–360.
- [24] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, “Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions,” *Phys. Lett. A* **223** (1996) 1–8.
- [25] G. Vidal and R. F. Werner, “Computable measure of entanglement,” *Phys. Rev. A* **65** (2002) 032314.
- [26] M. B. Plenio, “Logarithmic negativity: a full entanglement monotone that is not convex,” *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 090503.
- [27] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, “Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature?,” *Phys. Rev. Lett.* **80** no. 24, (1998) 5239–5242.
- [28] E. Ising, “Zur theorie der metalle,” *Z. Phys.* **31** (1925) 253–258.
- [29] H. Bethe, “Zur theorie der metalle,” *Z. Phys.* **71** (1931) 205–226.
- [30] J. I. Latorre and A. Riera, “A short review on entanglement in quantum spin systems,” *J. Phys. A-Math.* **42** (2009) 504002.
- [31] S. Sachdev, *Dilute Fermi and Bose gases*, p. 293–331. Cambridge University Press, 2011.
- [32] N. Crampé, R. I. Nepomechie, and L. Vinet, “Free-Fermion entanglement and orthogonal polynomials,” *J. Stat. Mech.* (2019) 093101.
- [33] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, “Two soluble models of an antiferromagnetic chain,” *Annals of Physics* **16** (1961) 407–466.
- [34] F. Benatti, R. Floreanini, and L. Memarzadeh, “Exact steady state of the open xx-spin chain: entanglement and transport properties,” *PRX Quantum* **2** (2021) .
- [35] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*. Springer, 2010.
- [36] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, “The askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue,” 1996.
- [37] I. Peschel, “Calculation of reduced density matrices from correlation functions,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) L205.
- [38] J. Surace and L. Tagliacozzo, “Fermionic gaussian states: an introduction to numerical approaches,” *SciPost Phys. Lect. Notes* (May, 2022) .
- [39] V. Eisler and Z. Zimborás, “On the partial transpose of fermionic gaussian states,” *New J. Phys.* **17** (May, 2015) 053048.

- [40] C. P. Herzog and Y. Wang, “Estimation for entanglement negativity of free fermions,” *J. of Stat. Mech.* **2016** (2016) 073102.
- [41] J. Eisert, V. Eisler, and Z. Zimborás, “Entanglement negativity bounds for fermionic gaussian states,” *Phys. Rev. B* **97** no. 16, (2018) .
- [42] A. Coser, E. Tonni, and P. Calabrese, “Partial transpose of two disjoint blocks in xy spin chains,” *J. Stat. Mech.* **2015** (2015) P08005.
- [43] V. Eisler and Z. Zimborás, “Entanglement negativity in two-dimensional free lattice models,” *Phys. Rev. B* **93** (2016) 115148.
- [44] P.-Y. Chang and X. Wen, “Entanglement negativity in free-fermion systems: An overlap matrix approach,” *Phys. Rev. B* **93** (2016) 195140.
- [45] H. Shapourian and S. Ryu, “Entanglement negativity of fermions: Monotonicity, separability criterion, and classification of few-mode states,” *Phys. Rev. A* **99** (2019) 022310.
- [46] H. Shapourian, K. Shiozaki, and S. Ryu, “Partial time-reversal transformation and entanglement negativity in fermionic systems,” *Phys. Rev. B* **95** (4, 2017) .
- [47] R. Simon, “Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2726–2729.
- [48] H. Shapourian and S. Ryu, “Finite-temperature entanglement negativity of free fermions,” *J. Stat. Mech.* (2019) .
- [49] H. Shapourian, P. Ruggiero, S. Ryu, and P. Calabrese, “Twisted and untwisted negativity spectrum of free fermions,” *SciPost Phys.* **7** (9, 2019) .
- [50] S. Murciano, R. Bonsignori, and P. Calabrese, “Symmetry decomposition of negativity of massless free fermions,” *SciPost Phys.* **10** (2021) 111.
- [51] G. Perez, R. Bonsignori, and P. Calabrese, “Dynamics of charge-imbalance-resolved entanglement negativity after a quench in a free-fermion model,” *J. Stat. Mech.* (2022) 053103.
- [52] P. Calabrese, J. L. Cardy, and E. Tonni, “Entanglement negativity in quantum field theory,” *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 130502.
- [53] P. Calabrese, J. L. Cardy, and E. Tonni, “Entanglement negativity in extended systems: A field theoretical approach,” *J. Stat. Mech.* (2013) P02008.
- [54] G. Perez and W. Witczak-Krempa, “Entanglement negativity between separated regions in quantum critical systems,” *Phys. Rev. Research* **6** (2024) 023125.
- [55] C. Berthiere and W. Witczak-Krempa, “Entanglement of skeletal regions,” *Phys. Rev. Lett.* **128** (2022) 240502.
- [56] N. Laflorencie, “Quantum entanglement in condensed matter systems,” *Phys. Rept.* **646** (2016) 1.
- [57] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” *J. Stat. Mech.* (2004) P06002.
- [58] C. Holzhey, F. Larsen, and F. Wilczek, “Geometric and renormalized entropy in conformal field theory,” *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 443.
- [59] M. B. Hastings, “An area law for one-dimensional quantum systems,” *J. Stat. Mech.* (2007) P08024.
- [60] M. M. Wolf, F. Verstraete, M. B. Hastings, and J. I. Cirac, “Area laws in quantum systems: mutual information and correlations,” *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 070502.
- [61] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, “Colloquium: Area laws for the entanglement entropy,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 277.

- [62] M.-C. Banuls, J. I. Cirac, and M. M. Wolf, “Entanglement in fermionic systems,” *Phys. Rev. A* **76** (2007) 022311.
- [63] Y. Javanmard, D. Trapin, S. Bera, J. H. Bardarson, and M. Heyl, “Sharp entanglement thresholds in the logarithmic negativity of disjoint blocks in the transverse-field Ising chain,” *New J. Phys.* **20** (2018) 083032.
- [64] G. Perez, C. Berthiere, and W. Witczak-Krempa, “Separability and entanglement of resonating valence-bond states,” *SciPost Phys.* **15** (2023) 066.
- [65] G. Perez and W. Witczak-Krempa, “The Fate of Entanglement,” [arXiv:2402.06677](https://arxiv.org/abs/2402.06677).
- [66] M. Fagotti and P. Calabrese, “Evolution of entanglement entropy following a quantum quench: Analytic results for the XY chain in a transverse magnetic field,” *Phys. Rev. A* **78** (2008) 010306.
- [67] I. Peschel and V. Eisler, “Reduced density matrices and entanglement entropy in free lattice models,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 504003.
- [68] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 504007.
- [69] I. D. Rodríguez and G. Sierra, “Entanglement entropy of integer quantum Hall states,” *Phys. Rev. B* **80** (2009) 153303.
- [70] H. F. Song, S. Rachel, C. Flindt, I. Klich, N. Laflorencie, and K. Le Hur, “Bipartite fluctuations as a probe of many-body entanglement,” *Phys. Rev. B* **85** (2012) 035409.
- [71] V. Eisler and I. Peschel, “Free-fermion entanglement and spheroidal functions,” *J. Stat. Mech.* (2013) P04028.
- [72] V. Eisler and I. Peschel, “Analytical results for the entanglement Hamiltonian of a free-fermion chain,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** (2017) 284003.
- [73] R. Bonsignori, P. Ruggiero, and P. Calabrese, “Symmetry resolved entanglement in free fermionic systems,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **52** (2019) 475302.
- [74] G. Perez, R. Bonsignori, and P. Calabrese, “Quasiparticle dynamics of symmetry-resolved entanglement after a quench: Examples of conformal field theories and free fermions,” *Phys. Rev. B* **103** (2021) L041104.
- [75] J. Dubail, J.-M. Stéphan, J. Viti, and P. Calabrese, “Conformal field theory for inhomogeneous one-dimensional quantum systems: the example of non-interacting Fermi gases,” *SciPost Phys.* **2** (2017) 002.
- [76] V. Eisler, F. Iglói, and I. Peschel, “Entanglement in spin chains with gradients,” *J. Stat. Mech.* (2009) P02011.
- [77] N. Crampé, R. I. Nepomechie, and L. Vinet, “Entanglement in fermionic chains and bispectrality,” *Rev. Math. Phys.* **33** (2021) 2140001.
- [78] N. Crampé, K. Guo, and L. Vinet, “Entanglement of free Fermions on Hadamard graphs,” *Nucl. Phys. B* **960** (2020) 115176.
- [79] F. Finkel and A. González-López, “Inhomogeneous XX spin chains and quasi-exactly solvable models,” *J. Stat. Mech.* (2020) 093105.
- [80] F. Finkel and A. González-López, “Entanglement entropy of inhomogeneous XX spin chains with algebraic interactions,” *JHEP* (2021) 1.
- [81] G. Perez, P.-A. Bernard, N. Crampé, and L. Vinet, “Multipartite information of free fermions on Hamming graphs,” *Nucl. Phys. B* **990** (2023) 116157.

- [82] P.-A. Bernard, N. Crampé, and L. Vinet, “Entanglement of free fermions on Hamming graphs,” *Nucl. Phys. B* **986** (2023) 116061.
- [83] P.-A. Bernard, N. Crampé, and L. Vinet, “Entanglement of free fermions on Johnson graphs,” *J. Math. Phys.* **64** (2023) 061903.
- [84] P.-A. Bernard, G. Carcone, N. Crampé, and L. Vinet, “Computation of entanglement entropy in inhomogeneous free fermions chains by algebraic Bethe ansatz,” *SciPost Phys. Proceedings* no. 14, (2023) 018.
- [85] P.-A. Bernard, Z. Mann, G. Perez, and L. Vinet, “Absence of logarithmic enhancement in the entanglement scaling of free fermions on folded cubes,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **57** (2023) 015002.
- [86] P.-A. Bernard, N. Crampé, R. Nepomechie, G. Perez, and L. Vinet, “Entanglement of free-fermion systems, signal processing and algebraic combinatorics,” [arXiv:2401.07150](https://arxiv.org/abs/2401.07150).
- [87] R. Bonsignori and V. Eisler, “Entanglement Hamiltonian for inhomogeneous free fermions,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **57** (2024) 275001.
- [88] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, R. Roy, and R. Askey, *Special functions*. Cambridge University Press, 1999.
- [89] M. Fagotti and P. Calabrese, “Entanglement entropy of two disjoint blocks in XY chains,” *J. Stat. Mech.* (2010) P04016.
- [90] J. Eisert, V. Eisler, and Z. Zimborás, “Entanglement negativity bounds for fermionic Gaussian states,” *Phys. Rev. B* **97** (2018) 165123.
- [91] A. Florio, “Two-fermion negativity and confinement in the schwinger model,” *Phys. Rev. D* **109** (2024) L071501.
- [92] M. E. H. Ismail and P. Simeonov, “Strong asymptotics for Krawtchouk polynomials,” *J. Comput. Appl. Math.* **100** (1998) 121.
- [93] M. Fagotti and P. Calabrese, “Universal parity effects in the entanglement entropy of XX chains with open boundary conditions,” *J. Stat. Mech* (2011) P01017.
- [94] P.-A. Bernard, I. Bussière, R. Floreanini, and L. Vinet, “Currents in non-equilibrium steady states of open inhomogeneous XX -spin chains,” [arXiv:2408.04818](https://arxiv.org/abs/2408.04818).
- [95] N. Crampe, L. Frappat, J. Gaboriaud, E. Ragoucy, L. Vinet, and M. Zaimi, “ λ -Griffiths polynomials: Bispectrality and biorthogonality,” [arXiv:2311.03256](https://arxiv.org/abs/2311.03256).